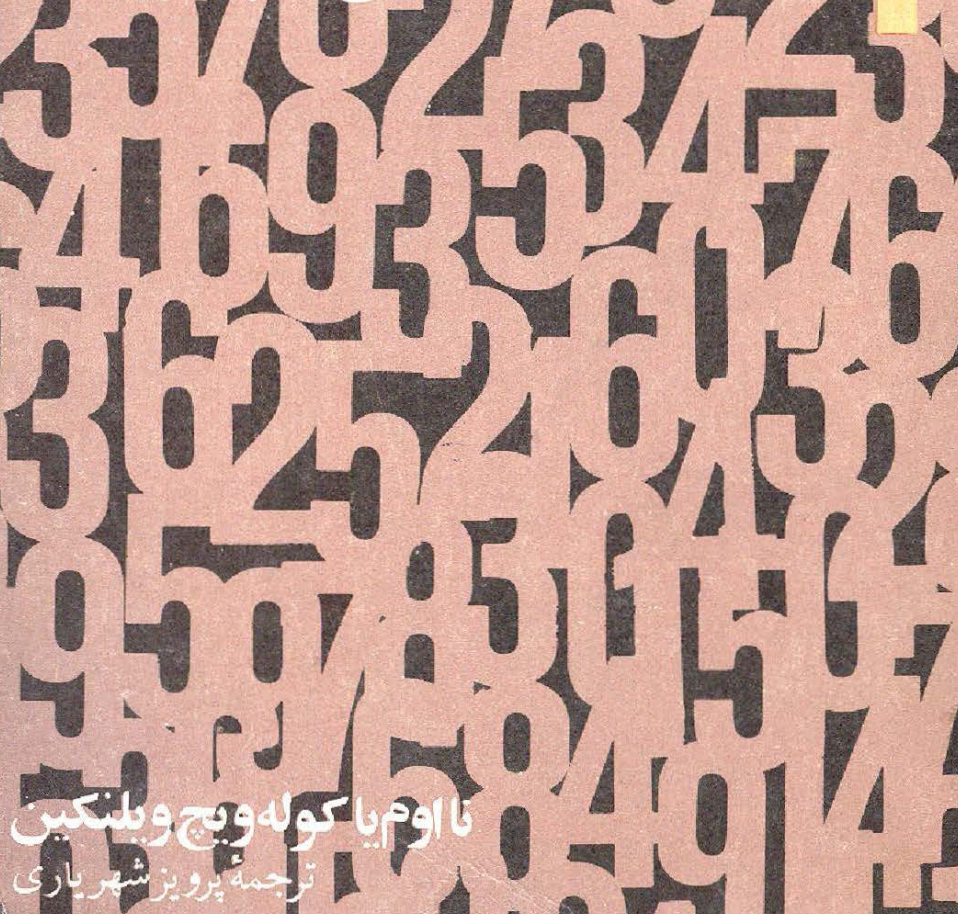




داستان مجموعه‌ها



نا اومیا کوله ویج ویلنکین
ترجمه پرویز شهریاری

نااوم یا کوله ویچ ویلنکین

داستان مجموعه‌ها

ترجمه پرویز شهرباری



انتشارات توکا، تهران، شاهرضا، روبروی دانشگاه

ناوم یا کوله ویج ویلنکین

داستان مجموعه‌ها

چاپ اول: ۱۳۵۵

چاپ دوم: شهریورماه ۱۳۵۷

چاپ: چاپخانه نقش جهان، تهران

شماره ثبت کتابخانه ملی ۱۵۶۳ - ۵۷۶۶۱

درس‌های ۷۰ سده نوزدهم، ژرژ کانتور ریاضی‌دان آلمانی، رشته تازه‌ای در ریاضیات بوجود آورد: نظریه مجموعه‌های نامتناهی. با گذشت چند ده سال، تقریباً تمامی ریاضیان بر اساس نظریه مجموعه‌ها، بازرسی شد. مفهوم‌های نظریه مجموعه‌ها، کلی‌ترین خاصیت‌های موضوع‌های ریاضی را منعکس می‌کند.

معمولاً نظریه مجموعه‌ها را در کتاب‌های درسی دانشکده‌ها (و احياناً دبیرستان‌ها) به صورت نظری مجموعه‌ها می‌آورند. ولی در این کتاب مفهوم‌های بنیانی نظریه مجموعه‌ها و نتیجه‌هایی که از آن به دست می‌آید، به زبان ساده شرح داده شده است.

قسمت مهمی از کتاب درباره داستان ایون تیخی قهرمان داستان س. لهما نویسنده لهستانی بحث می‌کند، که در مسافرت فضایی خود به مهمانخانه عجیبی برخورد می‌کند که بی نهایت اطاق دارد.

کتاب برای دانش آموزان، دانشجویان، معلمان و همه کسانی که با این رشته جالب ریاضی سروکار دارند و یا به آن علاقه‌مندند، می‌تواند به اندازه کافی مفید باشد.

وقتی که من در کلاس هشتم درس می خواندم برای نخستین بار با نظریه مجموعه ها آشنا شدم. این آشنایی را ضمن سخنرانی ای. م. هلفاند، که آن زمان دانشیاری خود را شروع کرده بود و حالا عضو آکادمی علوم اتحاد شوروی است، به دست آوردم. او دو ساعت تمام درباره چیزهایی صحبت کرد که باورکردنشان ممکن نبود: این که تعداد عددهای طبیعی با تعداد عددهای زوج برابر است، این که تعداد عددهای گویا با تعداد عددهای طبیعی یکی است، این که تعداد نقطه های واقع بر یک پاره خط برابر است با تعداد نقطه های روی یک مربع و غیره. آشنایی با نظریه مجموعه ها، درسالهای تحصیلم من در دانشکده مکانیک - ریاضی ادامه داشت. بعد از هر درس (و باید اعتراف کرد که گاهی حتی ضمن سخنرانی های که جالب نبودند)، دانشجویان در کریدورها دور هم جمع می شدند و درباره مسأله های جالب و نمونه های عجیبی کنه مربوط به مجموعه ها بود با هم بحث می کردند. به خصوص دانشجویان تازه کار قدیمی ترها را سؤال پیچ می کردند که چه گونه می توان منحنی ساخت که از تمام نقطه های یک مربع بگذرد و یا چگونه ممکن است تابعی ساخت که برای هیچ نقطه آن مشتق وجود نداشته باشد و غیره.

روشن است توضیحاتی که در این باره داده می شد، به اصطلاح «سرانگشتی» بود. با وجود این، وقتی که می خواستیم امتحان بدهیم، با شنیدن این توضیحات خود را سبک تر احساس می کردیم. ضمناً آشنایی بیش تر و دقیق تر بامبانی ریاضیات درسی، بحث های «کریدوری» ما را گرم تر می کرد.

من هم می‌خواهم، نظریه مجموعه‌ها را با همان شیوه‌ای که خودم آموخته‌ام و بیشتر مربوط به بحث‌های «کریدوری» است برای شما بازگو کنم. به همین مناسبت، تکیه کار بر طرح مسأله‌های روشن گفت‌وگو درباره مثال‌های عجیب و غیرقابل انتظار است، و به خصوص کوشش شده است که نظریه تابع‌های با متغیر حقیقی بیش‌تر و روشن‌تر مورد بررسی قرار گیرد. اگر این کتاب باعث شود که دانشجویان سال‌های آخر دانشکده‌ها، را شروع کرده‌اند، و یا حتی دانش‌آموزان دبیرستانی، شوق بیش‌تری به مطالعه دقیق‌تر نظریه مجموعه‌ها پیدا کنند، به هدف خود رسیده‌ام.

در پایان کتاب، مسأله‌هایی را گذاشته‌ام تا خواننده علاقه‌مند بتواند خود را در مورد آنچه که فرا گرفته است، آزمایش کند. همچنین، چه در متن کتاب و چه در مسأله‌ها، قسمت‌های مشکل‌تر را که برای خواننده تازه کار پیچیده‌تر است، با ستاره مشخص کرده‌ام، ولی صرف‌نظر کردن از این قسمت‌ها، هیچ لطمه‌ای به مطالعه مطالب بعدی نمی‌زند.

فصل اول

مجموعه‌ها و انجام عمل روی آنها از صفحه ۹ تا صفحه ۷۰

در صفحه ۱۰	مجموعه یعنی چه؟
در صفحه ۱۲	مجموعه را چگونه می‌دهند؟
در صفحه ۱۸	بتراشد یا نتراشد؟
در صفحه ۲۳	مجموعه تهی
در صفحه ۲۵	نظریه مجموعه‌ها و ریاضیات دبیرستانی
در صفحه ۳۰	زیرمجموعه
در صفحه ۳۲	نظریه مجموعه‌ها و آنالیز ترکیبی
در صفحه ۳۶	مجموعه مرجع
در صفحه ۳۷	مقطع (یا حاصلضرب منطقی) مجموعه‌ها
در صفحه ۴۳	اجتماع (یا حاصلجمع منطقی) مجموعه‌ها
در صفحه ۴۸	افراز مجموعه‌ها
در صفحه ۵۰	حساب مانده‌ها
در صفحه ۵۲	تفریق مجموعه‌ها
در صفحه ۵۴	جبر مجموعه‌ها
در صفحه ۶۱	سیاره افسانه‌ها

فصل دوم

دنیای شگفت‌آور بی‌نهایت از صفحه ۷۱ تا صفحه ۱۲۳

در صفحه ۷۲	رازهای بی‌نهایت
در صفحه ۷۶	همان‌خوانی عجیب
در صفحه ۸۷	از نویسنده
در صفحه ۸۸	مجموعه‌ها را چگونه مقایسه می‌کنند؟
در صفحه ۸۹	در مجلس رقص
در صفحه ۹۱	تناظر يك به يك
در صفحه ۹۲	آیا جزء مساوی کل است؟
در صفحه ۹۶	مجموعه‌های شما را
در صفحه ۹۸	عددهای جبری
در صفحه ۱۰۳	علامتهای بی‌نهایت روی صفحه
در صفحه ۱۰۶	مجموعه‌های نامساوی
در صفحه ۱۰۸	مجموعه شما را - کوچکترین بین بی‌نهایتها
در صفحه ۱۱۰	مجموعه‌های نامساوی
در صفحه ۱۱۱	صورت‌برداری ناموفق

در صفحه ۱۱۴	ناشمارای متصله
در صفحه ۱۱۶	وجود عددهای غیرجبری
در صفحه ۱۱۸	نقطه‌های واقع بر پاره‌خطهای بلند و کوتاه هم‌عددند
در صفحه ۱۱۹	پاره‌خط و مربع
در صفحه ۱۲۴	معلوم نیست چرا یکی از مسأله‌ها پل نمی‌شود؟
در صفحه ۱۲۵	آیا مجموعه‌ای با بزرگترین قوت وجود دارد؟
در صفحه ۱۲۷	حساب بی‌نهایت
در صفحه ۱۳۱	توان بی‌نهایت
در صفحه ۱۳۲	مجموعه‌های مرتب
در صفحه ۱۳۴	مجموعه‌های خوش ترتیب
در صفحه ۱۳۸	اصل نامفهوم
در صفحه ۱۳۹	دو سیب از یک سیب
در صفحه ۱۴۱	تقسیمهای محدود

فصل سوم

تابعها و منحنیهای عجیب یا گشت‌وگذار در موزۀ ریاضی از صفحه ۱۴۵ تا صفحه ۲۵۶

در صفحه ۱۴۶	پیشرفت مفهوم تابع
در صفحه ۱۵۵	جن از شیشه آزاد می‌شود
در صفحه ۱۵۳	نقطه‌های نمناک
در صفحه ۱۵۷	پله‌کان عجیب
در صفحه ۱۶۵	منحنی خاردار
در صفحه ۱۶۴	منحنی بسته یا طول بی‌نهایت
در صفحه ۱۶۷	قالی ریاضی
در صفحه ۱۷۵	اقلیدس، تقاضای کمک را رد می‌کند
در صفحه ۱۷۱	آیا به تعریفهای دقیق‌تری نیاز داریم؟
در صفحه ۱۷۴	خط، به عنوان اثر حرکت نقطه
در صفحه ۱۷۷	قضیه‌ای روشن با اباتی بسیار مشکل
در صفحه ۱۷۸	منحنی، از تمام نقطه‌های مربع عبور می‌کند
در صفحه ۱۸۱	همه‌چیز در معرض نابودی
در صفحه ۱۸۳	مجموعه‌ها را چگونه می‌سازند؟
در صفحه ۱۸۵	متصله
در صفحه ۱۸۶	خط کانتور
در صفحه ۱۸۷	آیا مساحت خط، همیشه مساوی صفر است؟
در صفحه ۱۹۱	میدان بدون مساحت
در صفحه ۱۹۳	نمونه‌های غیرمنتظره
در صفحه ۱۹۵	میدانها و مرزها
در صفحه ۱۹۷	عملیات بزرگ آبیاری
در صفحه ۱۹۹	تکلیف بعد چه می‌شود؟
در صفحه ۲۵۱	تعریف استقرایی بعد
در صفحه ۲۵۳	نیازی به تقریظ نیست، آنرا چاپ کنید
در صفحه ۲۵۷	نهیجه

مثالها و تمرینها از صفحه ۲۵۸ تا صفحه ۴۱۳

۱

مجموعه‌ها

و انجام عمل روی آنها

مجموعه یعنی چه؟

در این فصل دربارهٔ معنای مجموعه‌ها و عمل‌هایی که می‌توان روی آنها انجام داد، گفتگو می‌کنیم. با کمال تأسف مفهومی اساسی نظریه - یعنی مفهوم مجموعه - را نمی‌توان بطور دقیق تعریف کرد. بطور ساده می‌توان گفت که مجموعه یعنی «اجتماع»، «گروه»، «خانواده»، «دستگاه»، «طبقه»، «کلکسیون» و از این قبیل. ولی هیچکدام از اینها تعریف ریاضی مجموعه نیست، بلکه تنها غنای زبان را برای بیان يك مفهوم می‌رساند.

برای اینکه يك مفهوم را تعریف کنیم، قبل از هر چیز باید آنرا به عنوان حالت خاصی از يك مفهوم کلی‌تر نشان دهیم. برای مفهوم مجموعه این بیان ممکن نیست، زیرا در ریاضیات مفهومی کلی‌تر از مجموعه نداریم.

بنابراین، بجای اینکه به تعریف مفهوم مجموعه بپردازیم، آنرا به کمک مثال‌هایی روشن می‌کنیم.

اغلب دربارهٔ تعدادی چیز صحبت می‌شود که با يك نشانهٔ کلی به هم مربوط شده‌اند. مثلاً می‌توان دربارهٔ مجموعهٔ صندلیهای اطاق، مجموعهٔ اتمهای مشتری، مجموعهٔ باخته‌های بدن آدمی، مجموعهٔ سیب زمینیهای يك سبد، مجموعهٔ ماهیهای اقیانوس، مجموعهٔ همهٔ مربعهای روی صفحه، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع بر محیط يك دایرهٔ مفروض و غیره صحبت کرد.

چیزهایی که يك مجموعه را به وجود آورده اند، عضوهای آن نامیده می شود. برای اینکه نشان دهند که مجموعه A از عضوهای x ، y ، ...، z تشکیل شده است، معمولا می نویسند:

$$A = \{x, y, \dots, z\}$$

مثلا مجموعه روزهای هفته از این اعضا تشکیل شده است :
 {جمعه ، پنجشنبه ، چهارشنبه ، سه شنبه ، دوشنبه ، يك شنبه ، شنبه}
 و مجموعه ماههای سال از این اعضا :
 {آذر ، آبان ، مهر ، شهریور ، مرداد ، تیر ، خرداد ، اردیبهشت ، فروردین ، اسفند ، بهمن ، دی}

مجموعه ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 24 = 0$ شامل دو عدد ۴- و ۶ ، یعنی به صورت $\{4, -6\}$ است . آکولادی که دو طرف عضوهای مجموعه قرار گرفته است به این معنی است که این اعضا در يك مجموعه A به هم مربوط شده اند . اگر عضو x متعلق به مجموعه A باشد به صورت $x \in A$ نشان می دهند . علامت $\in$ ، علامت عضویت است . اگر عضو x متعلق به مجموعه A نباشد به صورت $x \notin A$ یا $\overline{x \in A}$ می نویسند . مثلا اگر A مجموعه همه عددهای زوج طبیعی باشد ، داریم :
 $6 \in A$ و $3 \notin A$.

اگر A مجموعه ماههای سال باشد :

$$A \ni \text{دوشنبه و } A \ni \text{اردیبهشت}$$

به این ترتیب وقتی که از مجموعه صحبت می کنیم، تعدادی چیز را در يك واحد - يك مجموعه - جمع آوری کرده ایم که این چیزها عضوهای آنرا تشکیل می دهند : بانی نظریه مجموعه ها ، «ژاکانتود» ، این مطلب را چنین بیان می کند :

«مجموعه عبارت است از يك فراوانی، که در ذهن ما به صورت واحد درآمده است.»
 در حقیقت ، عضوهای يك مجموعه حتی لازم نیست در عالم واقع

وجود داشته باشد ؛ مثل موقعی که در رساله‌های مذهبی بطور جدی در بارهٔ مجموعهٔ ارواح شیاطین ، فرشتگان مقرب بارگاه و غیره مطالعه می‌شود .

برای اینکه بتوانیم مفهوم مجموعه را بهتر پیش‌خود مجسم کنیم از مثال ن. ن. لوژین عضو فرهنگستان شوروی کمک می‌گیریم . يك كيسهٔ شفاف نایلونی که از هیچ طرف شکاف یا سوراخی نداشته باشد ، در نظر بگیرید و فرض کنید در داخل این کیسه عضوهای مجموعهٔ A قرار گرفته باشد ، ضمناً بجز عضوهای مجموعهٔ A هیچ چیز دیگری در کیسه نباشد . این کیسهٔ نازک نایلونی با اشیای x داخل آن ، می‌تواند به‌عنوان مجموعهٔ A در نظر گرفته شود که از عضوهای x تشکیل شده است . این کیسهٔ شفاف که همهٔ اعضاها را (و فقط آنها را) دربر گرفته است ، معنای پیوند دادن اشیایی را به صورت يك مجموعهٔ واحد روشن می‌کند .

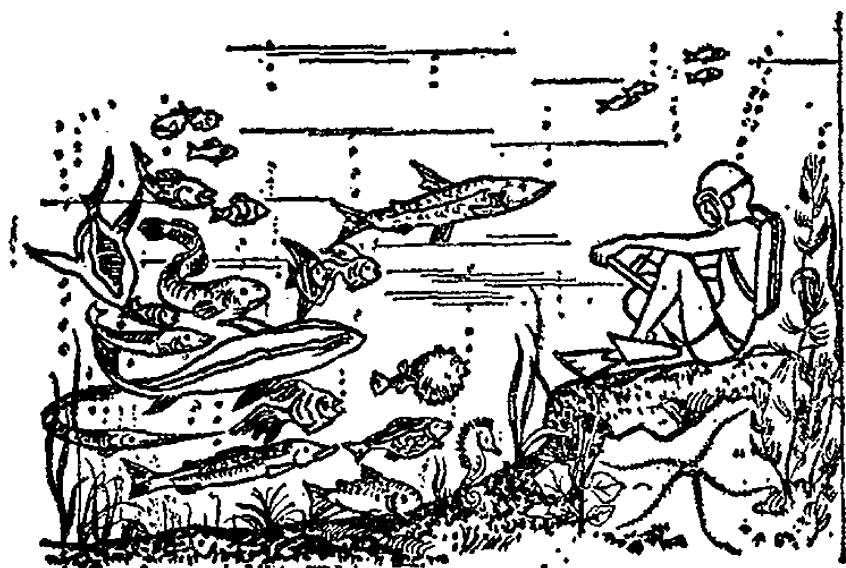
اگر يك مجموعه تعداد معینی عضو داشته باشد ، محدود (یا متناهی) و اگر بی‌نهایت عضو داشته باشد ، نامحدود (یا نامتناهی) نامیده می‌شود . مثلاً مجموعهٔ درختهای جنگل ، مجموعه‌ای متناهی و مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محیط دایره مجموعه‌ای نامتناهی است .

مجموعه را چگونه می‌دهند ؟

مجموعه را به صورتهای مختلفی می‌توان عرضه کرد . یکی از این راهها این است که فهرست کامل عضوهای مجموعه داده شود . مثلاً مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس ، که فهرست کامل آن در دفتر کلاس وجود دارد ؛ مجموعهٔ کشورهای روی زمین ، که فهرست آنها در اطلس جغرافیایی است ؛ مجموعهٔ همهٔ استخوانهای بدن آدمی ، که فهرست آنها در کتاب درسی تشریح ، ذکر شده است .

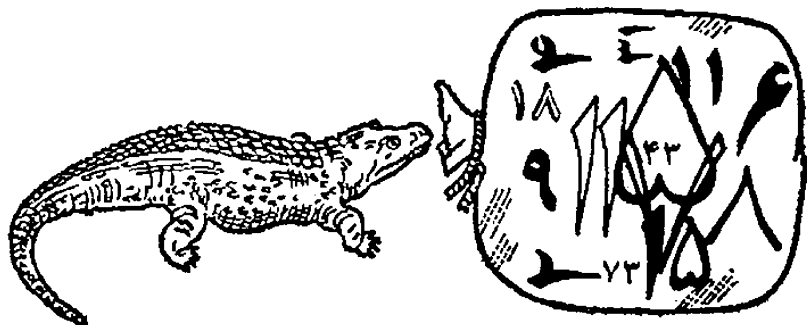
ولی این روش را در مورد مجموعه‌های نامتناهی نمی‌توان به‌کار

برد ؛ حتی در مورد مجموعه‌های متناهی هم گاهی به‌اشکال بر می‌خورد .
 مثلاً با وجودی که مجموعه ماهیهای اقیانوس متناهی است، آیا می‌توان
 فهرست کامل آنرا ارائه داد؟ در مورد مجموعه‌های نامتناهی هم روشن است
 که نمی‌توان مثلاً مجموعه همه عددهای درست، یا مجموعه همه نقطه‌های
 واقع بر محیط دایره را نام برد، زیرا عمل شمارش هرگز به پایان نمی‌رسد.



شمارش بزرگ ماهیها

در حالتی که نتوانیم فهرست کامل عضوهای مجموعه را نام
 ببریم، مجموعه را به کمک خاصیت مشترکی از آنها مشخص می‌کنیم،
 خاصیتی که در مورد تمام عضوهای مجموعه صادق باشد و برای هیچ
 چیز دیگری در جهان صادق نباشد. مثلاً می‌توانیم از مجموعه عددهای
 طبیعی نام ببریم. در این صورت روشن است که عدد ۷۳ متعلق به این
 مجموعه است، در حالی که عدد $\frac{۳}{۴}$ و یا سوسمار عضوی از این مجموعه
 نیست. به همین ترتیب $\sqrt{۲}$ و سیاره کیوان متعلق به مجموعه عددهای
 گویا نیستند، در حالی که $\frac{۷}{۱۵}$ عضوی از این مجموعه است.



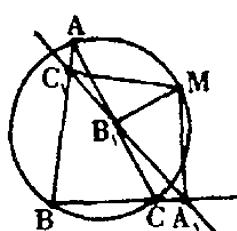
سومار عضوی از مجموعه عددهای طبیعی نیست

در هندسه اغلب با مجموعه نقطه‌هایی سروکار داریم که با يك يا چند خاصیت مشخص شده‌اند. معمولاً، و با دید سنتی در هندسه، چنین مجموعه نقطه‌ها را مکان هندسی نقطه‌ها می‌گویند. مثلاً: «دایره مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از يك نقطه این صفحه به يك فاصله باشند». این تعریف به معنای آن است که مجموعه نقطه‌هایی از صفحه که از نقطه مفروضی در این صفحه به يك فاصله باشند، مجموعه نقطه‌های واقع بر محیط يك دایره را تشکیل می‌دهند.

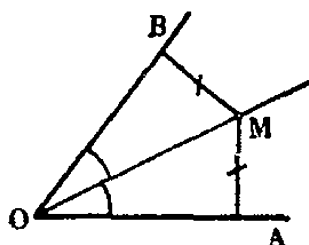
گاهی بیان مجموعه‌ها به وسیله خواص مشخص آنها به اشکالاتی برخورد می‌کند. گاهی پیش می‌آید که دو خاصیت مختلف، منجر به يك مجموعه می‌شود، یعنی همه عضوهایی که خاصیت اول را دارند، دارای خاصیت دوم هم هستند و برعکس. مثلاً مجموعه حیوانات پوست کلفتی که صاحب دو عاج هستند، همان مجموعه حیوانات پوست کلفت خرطوم‌دار است: هر دو خاصیت مجموعه فیلها را به ما می‌دهد.

در هندسه، مثلاً خاصیت «نقطه M از ضلعهای زاویه AOB به يك فاصله است» همان مجموعه نقطه‌هایی را می‌دهد که از خاصیت «زاویه AOM مساوی زاویه MOB است» بدست می‌آید (شکل ۱ - در این شکل نقطه‌هایی از صفحه در نظر گرفته شده است که در داخل زاویه AOB قرار دارند و از دو ضلع زاویه به يك فاصله‌اند). و یا در حساب خاصیت «عدد

صحیح قابل قسمت بر ۲» همان مجموعه‌ای را می‌دهد که خاصیت «رقم سمت راست عدد قابل قسمت بر ۲ است».



شکل ۲



شکل ۱

گاهی اثبات هم ارزی دوخاصیت مشکل است. مثلاً اثبات این مطلب را آزمایش کنید که هر دو خاصیت زیر منجر به مجموعه واحدی از نقطه‌ها می‌شود که در صفحه مثلث ABC قرار دارند: a پای عمودهایی که از نقطه M بر ضلعهای مثلث فرود می‌آوریم، روی یک خط راست قرار دارند، b نقطه M بر محیط دایره محیطی مثلث ABC قرار دارد (شکل ۲). (اثبات انطباق این دو مجموعه، در واقع همان اثبات قضیه سیمسون و قضیه عکس آن است).

بطور کلی، در بسیاری از قضیه‌های هندسی صحبت بر سر اثبات انطباق در مجموعه است، مثلاً مجموعه مثلثهای متساوی الاضلاع با مجموعه مثلثهای متساوی‌الزاویه، مجموعه چهارضلعیهای محیطی با مجموعه چهارضلعیهایی که در آنها مجموع دو ضلع روبرو برابر است با مجموع دو ضلع روبروی دیگر و غیره.

در بعضی موارد، هنوز انطباق یا عدم انطباق دو مجموعه‌ای که با خاصیت‌هایی مشخص شده‌اند، حل نشده است. مثلاً تا امروز معلوم نشده است که مجموعه $\{۱۰۹۳, ۳۵۱۱\}$ با مجموعه عددهای اول n که در مورد آنها $۲^{n-۲}$ بر n^2 قابل قسمت است، یکی است یا دو مجموعه مختلف‌اند.

نارسایی و ناروشنی بیان که استنباطهای گوناگونی به وجود می-آورد ، مشکل بزرگتری برای مشخص کردن مجموعه ها به کمک خاصیت مشترك عضوهای آن است. تعداد زیادی از حالت های بینابینی در تعلق یا عدم تعلق آنها به مجموعه مورد نظر، ما را دچار اشکال می کند. مثلاً فرض کنید که صحبت بر سر مجموعه همه درخت های روی زمین باشد . از يك طرف باید معلوم کرد که آیا منظور تمام درخت هایی است که روی زمین وجود داشته اند و وجود خواهند داشت و یا درخت هایی که در فاصله معینی از زمان روی زمین بوده است (مثلاً از اول اردیبهشت تا پایان آبان ۱۳۵۳) . ولی در این صورت این سؤال مطرح می شود که تکلیف ما با درخت هایی که در این فاصله زمانی بریده می شوند چیست ؟ علاوه بر آن يك رشته حالت های بینابینی وجود دارد که در حد فاصل بین درخت ها و سایر رستنی ها قرار گرفته اند و باید تصمیم گرفت که آیا آنها جزو مجموعه مورد نظر هستند یا نه ؟

حتی « مجموعه سیاره های دستگاه خورشیدی » هم بطور کامل مشخص نیست . همراه با سیاره های بزرگ (عطارد ، زهره ، زمین ، مریخ ، مشتری ، زحل ، اورانوس ، نپتون و پلوتون) قریب ۱۶۰۰ سیاره كوچك (که آستروئید یا سیارک نامیده می شوند) نیز دور خورشید می - چرخند . بعضی از این سیارک ها (مثل سهرس ، پالاس ، ژونو و غیره) صدها کیلومتر قطر دارند ، ولی سیارک هایی هم هستند که قطر آنها از يك کیلومتر تجاوز نمی کند . هرچه روش های مشاهده منجمین بهتر شود موفق به کشف سیاره های کوچکتر و کوچکتر می شوند . به همین مناسبت این پرسش پیش می آید که مرز بین سیاره ها و سنگ های آسمانی کجاست ؟ چه موقع بطور قطع می توان گفت که سیاره ها تمام شده است و بقیه جزو سنگ های آسمانی است ؟ شبیه این اشکال در مورد يك قهرمان بابلی پیش می آید که بعد از هجوم دسته بنی کریک فریاد زد : « از کجا شهر شروع

می شود و در کجا بنی کریک تمام می شود ؟» می گویند که به او جواب دادند : شهر درست در همان جایی تمام می شود که بنی کریک شروع می شود . درست شبیه این جمله که : « سیاره ها درست جایی تمام می شوند که سنگهای آسمانی شروع می شود . به همین مناسبت مجموعه سیاره های دستگاه خورشیدی نمی تواند تعریف دقیقی پیدا کند .

اختلاف بین سیاره و شهاب آسمانی مربوط به اخترشناسان است . ولی اختلاف بین «منزل» و «کلبه» به هر کسی که درجایی زندگی می کند ، مربوط می شود . به سادگی می توان تصور کرد که برای معرفی يك ساختمان ممکن است از زبان کسی نام محترمانه «منزل» و از زبان دیگری نام تحقیرآمیز «کلبه» شنیده شود . به این ترتیب این سؤال که آیا فلان ساختمان به مجموعه قصرها تعلق دارد یا نه ، بستگی مستقیم به این دارد که چه کسی این مجموعه را تنظیم می کند .

همین اشکال در مورد مجموعه کتابهای شعر هم وجود دارد . در اینجا هم پیدا کردن يك مرز مشخص بین شعر و نثر (نثر آهنگ دار ، شعر سفید و غیره) کار ساده ای نیست . «مجموعه افرادی که می توانند بطور مجانی از قطار استفاده کنند» هم کاملاً مشخص نیست . مثلاً بچه هایی که کمتر از ۵ سال داشته باشند ، به این مجموعه تعلق دارند . ولی ممکن است این وضع پیش آید که بچه ای ، ضمن مسافرت قطار ، از مرز پنج سالگی خود بگذرد . در این صورت معلوم نیست که آیا می توان او را عضو این مجموعه به حساب آورد یا نه ؟ (حکایت می کنند ، پدری که قانون را با دقت رعایت می کرد ، در لحظه ای که پسرش ۵ ساله شد ، ترمز قطار را کشید ، تا بتواند بطور دقیق ، بابت راهی که باقی مانده است ، پول بلیت پسرش را بپردازد.)

عدم دقتی هم ، که در زبان گفتگو وجود دارد ، اغلب دشواریهای ظریفی در موارد ساده به وجود می آورد . مثلاً فرض کنید ، مجموعه ای

از n عدد طبیعی اولیه باشد:

$$n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

و n عبارت باشد از تعداد حرفهایی که در این شعرناصرخسرو وجود دارد: به محشرگر زبان از من نگیری نیم عاجز من از گفت و شنودت این تعریف را، برای مجموعه A ، دو جور می توان فهمید. از يك طرف، می توان n را تعداد همه حرفهایی که برای نوشتن شعرناصرخسرو لازم است (یعنی همه حرفهایی که در چاپخانه، برای چیدن این شعر به کار برده اند)، به حساب آورد. اگر این حرفها را بشماریم، $n = 41$ می شود و در این صورت:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 41\}$$

از طرف دیگر، می توان n را تعداد همه حرفهای مختلف و تکرار نشده الفبای زبان فارسی دانست، که در این شعر به کار رفته است. در چنین حالتی $n = 17$ می شود و بنابراین

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$$

این مثالها نشان می دهد که چگونه باید، تعریف يك مجموعه را با ظرافت و دقت تنظیم کرد، تا از ابهام و چندگانگی آن، در مفهومی که بدست می آید، جلوگیری شود.

بتراشد یا نتراشد ؟

دشواری مربوط به تعریف يك مجموعه، همیشه تنها مربوط به نارسایی زبان نیست. گاهی علت، جدی تر از این نازك بینیهای زبان است. نمونه ای می آوریم: معلوم است که معمولاً يك مجموعه خاصیتهای عضو خودش را ندارد، یعنی، نمی تواند عضو خودش باشد (مثلاً مجموعه همه عددهای طبیعی، خود يك عدد طبیعی نیست، مجموعه همه مثلثها، خود يك مثلث نیست و غیره).

ولی مجموعه‌هایی هم وجود دارد، که شامل خود؛ به عنوان یکی از عضوهای آن مجموعه هستند. مثلاً "مجموعه مفاهیم انتزاعی"، خود يك مفهوم انتزاعی است (آیا اینطور نیست؟). چون اینگونه مجموعه‌ها، به‌ندرت مورد بررسی قرار می‌گیرند، آنها را نامتعارف و همه بقیه مجموعه را متعارف می‌نامیم.

حالا مجموعه A را در نظر می‌گیریم که عضوهای آن عبارتند از همه مجموعه‌های متعارف. در نظر اول، گمان می‌رود که این تعریف هیچ عیبی ندارد؛ چرا باید عبارت «مجموعه همه مجموعه‌های متعارف»، از عبارت «مجموعه همه مثلثها» بدتر باشد؟ ولی در واقع، در اینجا يك تناقض منطقی جدی به‌وجود می‌آید. ببینیم خود مجموعه A ، از چه نوع است: متعارف یا نامتعارف؟ اگر A را يك مجموعه متعارف بگیریم، در این صورت باید یکی از عضوهای خودش باشد (همه مجموعه‌های متعارف را در مجموعه A جمع کرده‌ایم). ولی اگر مجموعه A ، یکی از عضوهای خودش باشد، طبق تعریفی که کردیم، باید يك مجموعه نامتعارف باشد. اگر هم، مجموعه A را، يك مجموعه نامتعارف فرض کنیم، باید بتواند یکی از عضوهای خودش باشد، درحالی‌که بین عضوهای مجموعه A ، تنها مجموعه‌های متعارف وجود دارد و يك مجموعه نامتعارف نمی‌تواند عضو آن باشد.

در مورد مجموعه A ، به يك تناقض منطقی برخورد می‌کنیم: این مجموعه، نه می‌تواند متعارف باشد و نه نامتعارف. این تناقض منطقی، در حالت‌های خیلی ساده‌تر هم پیش می‌آید. مثلاً، اگر به سربازی دستور داده شود که تنها صورت سربازهایی از دسته خود را بتراشد، که خودشان این کار را نمی‌کنند؛ تکلیف این سرباز با خودش چیست؟ اگر او صورت خودش را بتراشد، به گروهی از سربازها تعلق پیدا می‌کند که خودشان صورت‌شان را می‌تراشند و اوحی ندارد صورت چنین سربازهایی

را بتراشد. اگر هم صورت خودش را نتراشد، به گروه سربازهایی می پیوندد که صورت خود را اصلاح نکرده اند، که در این صورت او وظیفه دارد به اصلاح صورت خود بپردازد.



مثالهای دیگری هم وجود دارد که به نظر می رسد، مجموعه مفروض کاملاً مشخص است، در حالی که با کمی دقت معلوم می شود که خیلی بد تعریف شده است و یا بهتر بگوییم اصلاً مشخص نشده است. مثلاً فرض کنید، مجموعه A از همه عده های گویایی تشکیل شده باشد، که می توان آنها را به كمك دوست کلمه فارسی تعریف کرد (که در بین آنها کلمه های « صفر »، « يك »، « دو » و غیره هم وجود دارد). از آنجا که مجموعه همه کلمه های فارسی، يك مجموعه محدود است (برای سادگی کار می توان مثلاً فرض کرد که کلمه ها را تنها از

فرهنگ معین انتخاب کرده باشیم) ، در نتیجه مجموعه این گونه عددها هم ، مجموعه محدودی است. این عددها را $r_1, r_2, \dots, r_N$ می گیریم. حالا عدد گویای r را به این ترتیب معین می کنیم :

$$r = 0 \cdot n_1 n_2 \dots n_N$$

که در آن n_i (یعنی i امین رقم اعشاری عدد r) را مساوی واحد انتخاب کرده ایم ، به شرطی که i امین رقم اعشاری عدد r_i مساوی واحد نباشد ؛ در غیر این صورت $n_i = 0$.

عدد r مساوی r_1 نیست ، زیرا رقم اول اعشاری آنها یکی نیست ؛ r مساوی r_2 هم نیست ، زیرا در رقم دوم اعشار با آن اختلاف دارد و غیره. بنابراین عدد r عضو مجموعه A نیست ، در حالی که این عدد به کمک کلمه هایی که از دو یست تجاوز نمی کند ، معین شده است. همچنین می توان در باره این پرسش فکر کرد:

کوچکترین عدد صحیحی که نتوان آنرا به کمک عبارتی تعریف کرد ، که کمتر از صد کلمه فارسی داد ، کدام است ؟

این عدد وجود دارد ، زیرا تعداد کلمه ها در زبان فارسی محدود است و بنابراین عددهایی وجود دارد که نتوان آنها را با عبارتی که کمتر از صد کلمه دارد ، معین کرد . در این صورت یکی از این عددها هم ، کوچکترین آنها خواهد بود .

از طرف دیگر چنین عددی وجود ندارد ، زیرا در چند سطر قبل (با حروف شکسته فارسی) ، آنرا با جمله ای که کمتر از صد کلمه دارد ، تعریف کردیم ؛ بنابراین مفهوم همین جمله ، چنین عددی نمی تواند وجود داشته باشد . خود تعریف بالا ، عدم وجود این عدد را ثابت می کند .

و این هم نمونه بغرنجتری از يك مجموعه متناهی ، که در مورد آن نمی توان گفت که آیا شامل يك عضو مفروض هست یا نه. تمام صفت های زبان فارسی را به دو دسته تقسیم می کنیم . در دسته اول صفت هایی را

قرار می‌دهیم ، که خودش خاصیت خودش را داشته باشد ، و در دسته دوم همه بقیه صفتها را . مثلاً صفت «فارسی» به‌دسته اول تعلق خواهد داشت ، زیرا کلمه «فارسی» در واژه‌نامه‌های فارسی وجود دارد ، یعنی «فارسی» بودن برای خود کلمه «فارسی» هم صدق می‌کند . همچنین صفت «چارسیلابی» در این دسته است ، زیرا کلمه «چار- سی- لا- بی» خودش از ۴ سیلاب درست شده است ، یعنی ۴ سیلاب داشتن ، برای خود کلمه «چار سیلابی» هم صدق می‌کند. ولی کلمه «آلمانی» در واژه‌نامه فارسی پیدا می‌شود، نه در زبان آلمانی، یعنی آلمانی بودن برای کلمه «آلمانی» صدق نمی‌کند . همچنین صفت «يك سیلابی» به دسته دوم تعلق دارد ، زیرا ، کلمه «يك سیلابی» دارای يك سیلاب نیست (يك- سی- لا- بی = ۴ سیلاب) . به همین ترتیب کلمه «خاکستری» ، زیرا این کلمه خودش خاکستری نیست و فقط معروف يك نوع رنگ است .

به نظر می‌رسد که همه چیز درست است و هر صفتی در دسته خودش قرار می‌گیرد . برای اینکه این دو دسته را از هم تمیز دهیم ، دو صفت جدید قبول می‌کنیم . صفت‌هایی را که در دسته اول قرار دارند ، «خود پذیر» (به معنای اینکه خاصیت خود را می‌پذیرند) و صفت‌هایی را که در دسته دوم قرار دارند ، «دیگر پذیر» می‌نامیم . کلمه‌های «خود پذیر» و «دیگر پذیر» صفت‌اند و باید هر کدام از آنها را در یکی از دو دسته جا داد . در مورد کلمه «خودپذیر» اشکالی پیش نمی‌آید ، جای این صفت در دسته اول است ، در این صورت دارای همان خاصیتی است که بیان می‌کند ، مگر نه این است که در دسته اول کلمه‌های خودپذیر را جا دادیم ؟ ولی در مورد کلمه «دیگرپذیر» دچار اشکال می‌شویم .

این کلمه را نمی‌توان در دسته کلمه‌های خودپذیر قرار داد ، زیرا در این صورت کلمه «دیگر پذیر» باید خاصیتی را بیان کند، که خود دارا باشد، ولی خاصیتی که به وسیله این صفت بیان می‌شود، به معنای آن است

که باید در دسته دوم قرار گیرد . ولی وقتی که در دسته دوم قرار گرفت، به معنای آن است که نباید صاحب خاصیتی باشد، که به وسیله این کلمه بیان می شود ، یعنی باید خود پذیر باشد و در نتیجه باید در دسته اول قرار گیرد ، زیرا جای کلمه های خودپذیر در دسته دوم نیست .

در نظریه مجموعه ها ، نمونه های بسیاری از اینگونه وجود دارد، که تعریف يك مجموعه ، تناقضی را در درون خود به وجود می آورد . این مطلب که با چه شرطهایی این وضع پیش می آید ، به بررسی عمیق تری در منطق ریاضی نیاز دارد و همین بررسیها چهره منطق ریاضی را بکلی دگرگون کرده است . بسیاری از این بررسیها، کاربردهایی در ساختمان نظریه ماشینهای سریع العمل محاسبه ، نظریه خودکار کردن وغیره پیدا کرد . ولی این بررسیها به منطق ریاضی مربوط است و ما از آن می گذریم . از اینجا به بعد ، ما تنها به مجموعه هایی می پردازیم که تعریفی دقیق وبدون تناقض دارند وتشکیل آنها ، بدون هیچ شکی انجام گرفته است (مثل مجموعه همه عددهای طبیعی ، مجموعه همه مربعهای واقع بر يك صفحه وغیره) .

مجموعه تهی

خود نام « مجموعه » به این معناست که هر مجموعه باید شامل تعدادی (و لااقل دو) عضو باشد . ولی در واقع اینطور نیست . در ریاضیات ، مجموعه هایی هم که تنها يك عضو داشته باشند ، و یا حتی اصلا عضوی نداشته باشند، مورد بررسی قرار می گیرد . مجموعه های از نوع اخیر را (یعنی مجموعه هایی را که حتی يك عضو هم ندارند) ، مجموعه تهی نام گذاشته اند و با علامت ϕ نشان می دهند .

نمونه هایی از مجموعه تهی : مجموعه اسبهای روی ماه ، مجموعه پستانداران ده پا ، مجموعه پزشکان سه ساله ، مجموعه ریشه های حقیقی

معادله $x^4 + 16 = 0$ ، مجموعه جوابهای دستگاه

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x - 10y = 6 \end{cases}$$

به چه مناسبت مفهوم مجموعه تهی را قبول کرده اند؟ وقتی که يك مجموعه با خاصیت ویژه اش داده می شود ، همیشه از قبل معلوم نیست که لا اقل يك عضو با این خاصیت وجود دارد یا نه ؟ مثلاً فرض کنید مجموعه A ، از همه چهار ضلعیهایی تشکیل شده باشد که

(a) همه زاویه های آنها قائمه باشد ،

(b) دو قطر هريك از آنها ، طولهای مختلف داشته باشد .

برای کسی که از هندسه اطلاعی ندارد ، هیچگونه تناقضی در این تعریف وجود ندارد . ولی از قضیه مربوط به تساوی قطرها در مستطیل نتیجه می شود که این مجموعه ، تهی است . همچنین مجموعه مثلثهایی که مجموع زاویه های هر يك از آنها با 180° درجه فرق داشته باشد ، يك مجموعه تهی است ؛ مجموعه سه جمله های درجه دومی که بیش از دو ریشه داشته باشند ، تهی است . بطور کلی بسیاری از حکمهای ریاضی را می توان به صورت حکمی درباره يك مجموعه تهی تنظیم کرد . (آزمایش کنید که چگونه می توان قضیه فیثاغورث را به این ترتیب تنظیم کرد ؟) بدون حل معادله $x^4 - 7x^2 - 6x + 26 = 0$ ، نمی توان قضاوت کرد که آیا مجموعه ریشه های حقیقی آن تهی است یا نه ؛ در حالی که اگر این معادله را به صورت زیر بنویسیم :

$$(x^2 - 4)^2 + (x - 3)^2 + 1 = 0$$

به روشنی معلوم می شود که ریشه حقیقی ندارد .

گاهی در مورد مجموعه های غیر ریاضی ، به سختی می توان تهی بودن یا تهی نبودن آنها را مشخص کرد . اگر کسی در جانور شناسی کم اطلاع باشد ، نمی تواند به این پرسش ، پاسخ دهد که آیا مجموعه

شیرهای آبی در دریاچه بایکال ، یا مجموعه ببرهایی که بطور آزاد در استرالیا زندگی می کنند ، تهی است ؟

در باره بعضی از مجموعه ها ، تا امروز نتوانسته اند پاسخ درستی بدهند . مثلاً هنوز معلوم نیست که آیا مجموعه همه عددهای طبیعی n که در نامساوی $n > 2$ و معادله

$$x^n + y^n = z^n$$

صدق می کنند، يك مجموعه تهی است ؟ (این همان مسأله مشهور فرما است) . همچنین تا امروز معلوم نشده است که آیا مجموعه رقمهایی که در تبدیل عدد π به صورت اعشاری، به تعداد محدودی تکرار می شوند ، تهی است ؟ (عدد π تا چند هزار رقم اعشاری محاسبه شده است ، ولی هنوز روشن نشده است که آیا همه رقمهایی که در تبدیل اعشاری آن بکار می رود، بی نهایت مرتبه تکرار می شوند، یا تعداد تکرار بعضی از رقمها، محدود است .)

هنوز روشن نشده است که آیا مجموعه جوابهای صحیح معادله $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ مجموعه ای تهی است ؟ (روشن شده است که مجموعه جوابهای طبیعی این معادله تهی است ، ولی درباره جوابهای صحیح ، مثبت یا منفی ، مسأله حل نشده است .)

این هم معلوم نشده است که آیا مجموعه همه پله زیودوروسها^۱ در کره زمین، يك مجموعه تهی است ؟ اگر موجودات دریاچه لوخنس واقعاً پله زیودوروس باشند ، این مجموعه ، تهی نیست .

نظریه مجموعه ها و ریاضیات دبیرستانی

مجموعه يك مفهوم کلی است و می تواند از هر چیزی درست شده باشد : ماهیها ، خانه ها ، مربعا ، عددها ، نقطه ها و غیره . همین

(۱) حیواناتی از دوران دوم به شکل دوک واز دینوسورها .

خصلت ، سرچشمه کاربرد بیش از حد نظریه مجموعه‌ها در متنوع‌ترین رشته‌های دانش بشری است (ریاضیات ، مکانیک ، فیزیک ، زیست - شناسی ، زبان‌شناسی و غیره) . در ریاضیات ، بخصوص مجموعه‌هایی نقش اساسی دارند ، که از « عنصرهای ریاضی » تشکیل شده باشند : شکل‌های هندسی ، عددها ، عبارتهای جبری ، تابعها و غیره . ریاضیات دبیرستانی با بسیاری از اینگونه مجموعه‌ها سروکار دارد ، اگر چه در بعضی موارد از ذکر نام «مجموعه» خودداری می‌شود . این وضع بدان مناسبت وجود دارد که اساسی‌ترین قسمت‌های ریاضیات دبیرستانی تا پایان سده هفدهم پیدا شده بود ، در حالی که نظریه مجموعه‌ها در سده نوزدهم متولد شد .

با وجود این ریاضیات دبیرستانی ، در هر قدم ، با مجموعه‌ها سروکار دارد . بخصوص ، اغلب به مجموعه‌های عددی برخورد می‌کنیم ، یعنی مجموعه‌هایی که از عددها تشکیل شده‌اند . نمونه‌هایی از این گونه مجموعه‌ها را ذکر می‌کنیم :

- (a) مجموعه همه عددهای طبیعی ،
- (b) مجموعه همه عددهای صحیح (مثبت ، منفی و صفر) ،
- (c) مجموعه همه عددهای گویا ،
- (d) مجموعه همه عددهای حقیقی ،
- (e) مجموعه همه عددهای مختلط ،
- (f) مجموعه مساحت‌های چند ضلعیهای منتظم محاط در دایره مفروض و غیره .

هر معادله ، با دونوع مجموعه عددی سروکار دارد . نخستین آنها عبارت است از مجموعه عددهایی که به ازای آنها ، عبارت تشکیل دهنده معادله ، معنا داشته باشد . این مجموعه عددی را حوزه قابل قبول مقادیر مجهول گویند . مثلاً برای معادله

$$\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{x-1}{x^2 - 9} = -\frac{1}{3}$$

حوزه مقادیر قابل قبول ، عبارت است از همه عددهای x ، که برای آنها داشته باشیم : $x^2 - 4 \neq 0$ و $x^2 - 9 \neq 0$ ، یعنی همه عددها ، بجز عددهای مجموعه $\{3, -3, 2, -2\}$. برای معادله

$$\sqrt{-x^2 + x + 12} + x = 2 + \sqrt{10}$$

حوزه مقادیر قابل قبول ، از عددهایی تشکیل شده است که برای آنها داشته باشیم $-x^2 + x + 12 \geq 0$ ، یعنی $4 \leq x \leq -3$.

دومین مجموعه ای که به معادله ها و نامعادله ها مربوط می شود ، مجموعه جوابهاست . مثلاً برای معادله $x^2 - 7x + 12 = 0$ ، مجموعه ریشه ها ، از دو عدد تشکیل شده است : $\{3, 4\}$ ، و برای معادله $\sin \pi x = 0$ ، از بی نهایت عدد ، یعنی همه عددهای صحیح . وقتی که معادله ای داده شده باشد ، مجموعه M ریشه های آن ، به این ترتیب تعریف می شود : عددهایی از x که عضو مجموعه M هستند ، در معادله مفروض صدق می کنند . وقتی که معادله ای حل شد ، مجموعه M را می نویسند (اگر محدود باشد) و یا آنرا با خاصیت ویژه ای که دارد ، مشخص می کنند (اگر نامحدود باشد) ، مثلاً اینکه همه عضوهای آن صحیح اند .

مجموعه جوابهای يك معادله ، معمولاً از چند عدد و یا (برای بیشتر معادله های مثلثاتی) ، از چند رشته عدد تشکیل می شود ، درحالی که مجموعه جوابهای يك نامعادله ، قسمتی از مجموعه عددهای حقیقی را پرمی کند . مثلاً نامعادله $4 - x^2 \geq 0$ در فاصله بسته $-2 \leq x \leq 2$ صدق می کند ، و نامعادله

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) \geq 0$$

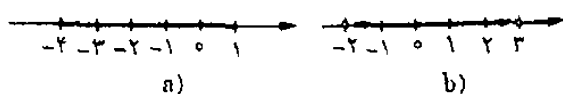
در فاصله های $-2 \leq x \leq 2$ و $3 \leq x \leq 5$. اگر در نامعادله ، علامت

تساوی وجود نداشته باشد ، از فاصلهٔ مربوط به جواب ، مرزها حذف می‌شود و به اصطلاح فاصله‌های باز عددی بدست می‌آید. مثلاً مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ

$$(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) > 0$$

از فاصله‌های باز $-2 < x < 2$ و $3 < x < 5$ تشکیل می‌شود. مرزهای -2 ، 2 ، 3 و 5 در نامعادله ، صدق نمی‌کند. ممکن است برای جواب يك نامعادله ، مجموعهٔ بغرنجتری بدست آید. مثلاً جواب نامعادلهٔ $\frac{x-1}{4-x} \geq 0$ ، مجموعه‌ای از عددهای x است که در $1 \leq x < 4$ صدق کند. در اینجا یکی از مرزها (یعنی ۱) به مجموعهٔ جواب تعلق دارد و مرز دیگر (یعنی ۴) ، عضوی از این مجموعه نیست.

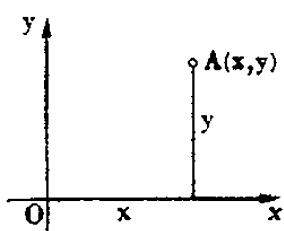
چون هر عدد حقیقی را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌ای از محور عددها نمایش داد ، يك مجموعهٔ عددی را می‌توان مثل مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع بر يك خط نمایش داد. مثلاً روی شکل $3 - a$ ، مجموعهٔ عددهای x که در شرط $1 \leq x \leq 4$ صدق می‌کنند ، و در شکل $3 - b$ ، مجموعهٔ عددهای x که در شرط $2 < x < 3$ صدق می‌کنند ، نشان داده شده است.



شکل ۳

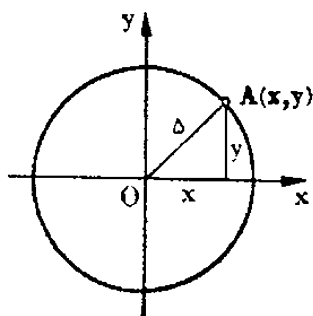
بخصوص ، وقتی که عضوهای يك مجموعه ، هر کدام از دو یا سه عدد درست شده باشد ، راحت‌تر است که با نمایش هندسی نشان داده شود. مثلاً معادلهٔ $x^2 + y^2 = 25$ ، مجموعهٔ M را می‌دهد که هر عضو آن دو عدد (x, y) است که به ازای آنها ، معادلهٔ مفروض تبدیل به اتحاد بشود. زوج عددهای $(5, 0)$ و $(0, 3)$ به مجموعهٔ M تعلق دارند ، زیرا $25 = 0^2 + 5^2$ و $25 = 3^2 + 0^2$ ؛ ولی زوج عدد $(6, 1)$ به

این مجموعه تعلق ندارد، زیرا $۲۵ \neq ۳۷ = ۶^۲ + ۱^۲$. ولی بیان مجموعه M به این ترتیب، کاملاً روشن کننده نیست . برای اینکه بیان مجموعه، روشن تر باشد، از روش مختصات استفاده می کنیم . دستگاه مختصات دکارتی را در صفحه، انتخاب می کنیم (و این همان دستگاهی است که در برنامه دبیرستانی وجود دارد). در این صورت هر زوج عدد (x, y) متناظر با نقطه‌ای از صفحه، و هر نقطه صفحه متناظر با دو عدد x و y ، مختصات نقطه، است (شکل ۴).

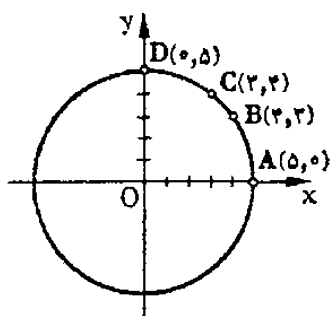


شکل ۴

اگر روی صفحه، همه زوج عددهای (x, y) را، که برای آنها داریم: $x^2 + y^2 = ۲۵$ ، به وسیله نقطه‌های متناظر آنها نشان دهیم، دایره به شعاع ۵ و مرکز واقع در مبدا مختصات، بدست می آید (شکل ۵). اگر قضیه فیثاغورث را به خاطر آوریم، به سادگی روشن می شود که



شکل ۶



شکل ۵

مجموعه همه نقطه‌های (x, y) ، که برای آنها $x^2 + y^2 = ۲۵$ ، بر مجموعه نقطه‌های محیط این دایره منطبق است (شکل ۶).

نامساویهایی که شامل دو مجهول باشند، معمولاً يك قسمت کامل از صفحه را می دهند، نه يك منحنی واقع بر صفحه را . مثلاً نامعادله $x^2 + y^2 \leq ۲۵$ ، عبارت است از مجموعه نقطه‌هایی از صفحه، که فاصله

آنها نامبداء مختصات از ۵ تجاوز نکنند، یعنی مجموعه نقطه‌های واقع در داخل و روی محیط دایره‌ای به شعاع مساوی ۵ و مرکز واقع بر مبدا مختصات. نامعادله $x^2 + y^2 < 25$ ، معرف مجموعه نقطه‌های واقع در داخل همان دایره است و دیگر شامل نقطه‌های واقع بر محیط آن نمی‌شود. در هندسه هم، با دو نوع مجموعه، مواجه می‌شویم. نوع اول به قضیه‌های هندسه مربوط می‌شود، که معمولاً درباره مجموعه‌ای از شکل‌های هندسی سخن می‌رود. مثلاً، این قضیه که قطرهای يك متوازی-الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، به مجموعه همه متوازی‌الاضلاعها مربوط می‌شود. نوع دوم به خود شکل‌های هندسی مربوط است، که هر کدام از آنها مجموعه‌ای از نقطه‌های تشکیل دهنده آن است. به این ترتیب می‌توانیم از مجموعه نقطه‌های يك دایره، مجموعه نقطه‌های يك مخروط و غیره گفتگو کنیم.

در جبر، به مجموعه‌هایی از نوع مجموعه همه چند جمله‌ایهای دومتغیره، مجموعه همه معادله‌های درجه دوم، مجموعه همه معادله‌های جبری و غیره برخورد می‌کنیم. بطور ساده، در هر قسمت ریاضیات دبیرستانی، به نحوی با نظریه مجموعه‌ها سروکار داریم.

زیر مجموعه

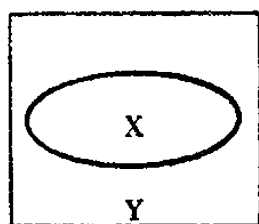
از آنجا که عضوهای يك مجموعه را می‌توان هر چیزی و با هر ماهیتی انتخاب کرد، ورود مفهوم مجموعه، ریاضیات را متنوع تر و ثمربخش تر کرد؛ حکمی که در مورد يك مجموعه به اثبات برسد، می‌تواند درباره نقطه‌های يك شکل هندسی، یا مجموعه عددهای طبیعی، یا مجموعه حیوانات یا گیاهان، یا مجموعه اتمها یا مولکولها و غیره، صادق باشد. به همین مناسبت مفهومها و قضیه‌های مربوط به مجموعه‌ها بسیار کلی و دامنه کاربرد آنها پهناور است و ما در اینجا درباره بعضی از آنها گفتگو

می‌کنیم .

قبل از همه با مفهوم زیرمجموعه آشنا می‌شویم . هر وقت با مجموعه‌ای سر و کار داشته باشیم ، که خود مستقل نباشد و به عنوان قسمتی از مجموعه بزرگتر در نظر گرفته شده باشد ، مفهوم زیر مجموعه به وجود می‌آید .

مجموعه B را زیر مجموعه‌ای از مجموعه A گویند ، وقتی که هر عضو x از مجموعه B ، ضمناً عضوی از مجموعه A باشد و در چنین حالتی می‌نویسند : $B \subset A$.

مثلاً ، اگر يك دبیرستان را در نظر بگیریم ، مجموعه دانش آموزان کلاس دهم ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه دانش آموزان این دبیرستان است . مجموعه دانش آموزان این دبیرستان هم ، به نوبه خود ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه همه دانش آموزان دبیرستانهاست .



شکل ۷

مجموعه همه روباهها ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه همه حیواناتی درنده است ؛ مجموعه همه حیواناتی درنده ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه همه پستانداران است ؛ مجموعه همه پستانداران ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه همه حیواناتی ذی فقار است .

اگر شکل هندسی X ، قسمتی از شکل هندسی Y باشد ، مجموعه نقطه‌های شکل X ، زیر مجموعه‌ای از مجموعه نقطه‌های شکل Y خواهد بود (شکل ۷) .

در هندسه هم اغلب به زیر مجموعه‌های يك مجموعه شكلها برخورد می‌کنیم . به عنوان نمونه ، مجموعه‌های زیر را در نظر می‌گیریم :

(a) مجموعه A تشکیل شده است از همه چهارضلعیها ،

(b) مجموعه B شامل همه دوزنقه‌هاست ،

(c) مجموعه C از همه متوازی الاضلاعها تشکیل شده است ،

(d) مجموعه D از همه مستطیلها تشکیل شده است ،

(e) مجموعه E از همه مربعها تشکیل شده است.

در اینجا شکل هر ردیف بعدی، حالت خاصی از شکل ردیف قبل است (دوزنقه حالت خاصی از چهارضلعی است، متوازی الاضلاع حالت خاصی از دوزنقه است و غیره). و این به معنای آن است که: هر مجموعه بعدی، زیر مجموعه ای از مجموعه قبلی است:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E$$

همچنین در مورد نمونه زیر ، هر مجموعه بعدی ، زیر مجموعه ای از مجموعه قبلی است:

(a) مجموعه همه عددهای مختلط ،

(b) مجموعه همه عددهای حقیقی ،

(c) مجموعه همه عددهای گویا ،

(d) مجموعه همه عددهای صحیح ،

(e) مجموعه همه عددهای طبیعی .

در بسیاری موارد ، برای اینکه زیر مجموعه ای را از يك مجموعه جدا کنند، به خصوصیت مجموعه مفروض، شرط تکمیلی اضافه می کنند. مثلاً برای اینکه زیر مجموعه عددهای طبیعی را از مجموعه عددهای صحیح جدا کنیم، شرط $n > 0$ را اضافه می کنیم و برای اینکه زیر مجموعه مثلثهای متساوی الاضلاع را از مجموعه مثلثها جدا کنیم ، شرط $a = b = c$ را به آن اضافه می کنیم .

* قبلاً گفتیم که بسیاری از قضیه ها را می توان به عنوان انطباق دو مجموعه ، منظم کرد . در کنار آنها ، به قضیه هایی هم برخورد می کنیم که در آنها گفتگو از این است که يك مجموعه ، زیر مجموعه ای از يك مجموعه دیگر است . مثلاً در قضیه « اگر در يك چهارضلعی ضلعها

مساوی باشد (لوزی)، قطرهای برهم عمودند، با دو مجموعه سروکار داریم: مجموعه A ، یعنی مجموعه همه لوزیها؛ مجموعه B ، یعنی مجموعه همه چهار ضلعیهایی که قطرهای عمود برهم دارند. و محتوی قضیه این است که $A \subset B$.

اگر مجموعه A ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه B باشد: $A \subset B$ ، تعلق به مجموعه A ، شرط کافی برای تعلق به مجموعه B است؛ درحالی که تعلق به مجموعه B ، شرط لازم برای تعلق به مجموعه A نیست. مثلاً فرض کنید، مجموعه همه عددهای زوج مثبت باشد، و A مجموعه همه عددهای طبیعی که به رقم ۴ ختم شده‌اند. روشن است که $A \subset B$. بنابراین برای اینکه عدد صحیح n ، زوج باشد، کافی است که به رقم ۴ ختم شده باشد. از طرف دیگر، برای اینکه عددی به ۴ ختم شده باشد، لازم است که حتماً زوج باشد.

در حالتی که مجموعه‌های B و A برهم منطبق باشند، تعلق به A ، شرط لازم و کافی برای تعلق به B است. به عبارت دیگر قضیه مربوط به شرط لازم و کافی، منجر به قضیه انطباق دو مجموعه می‌شود. مثلاً، شرط لازم و کافی برای اینکه عدد n بر ۱۰ قابل قسمت باشد، این است که این عدد به ۰ ختم شده باشد. به عبارت دیگر مجموعه A ، عددهای مضرب ۱۰، بر مجموعه B ، عددهای صحیحی که به ۰ ختم شده‌اند، منطبق است.

به همین ترتیب، مجموعه همه لوزیها بر مجموعه متوازی الاضلاعیهایی که قطرهای عمود برهم دارند، منطبق است. به این ترتیب، برای اینکه متوازی الاضلاعی، لوزی باشد، لازم و کافی است که قطرهای آن برهم عمود باشد. *

نظریهٔ مجموعه‌ها و آنالیز ترکیبی*

بینیم يك مجموعهٔ محدود، چند زیر مجموعه دارد (مجموعهٔ تهی و خود مجموعهٔ اصلی را هم، زیر مجموعه‌هایی از آن به حساب می‌آوریم). مجموعه‌ای که يك عضو داشته باشد، دو زیرمجموعه دارد: ϕ و $\{a\}$. مجموعه‌ای که شامل دو عضو a و b باشد، چهار زیرمجموعه دارد: ϕ ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ و $\{a, b\}$. اگر به این مجموعه، عضو سوم c را اضافه کنیم، علاوه بر چهار زیرمجموعهٔ قبل: ϕ ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ و $\{a, b\}$ ، چهار زیرمجموعهٔ دیگر: $\{c\}$ ، $\{a, c\}$ ، $\{b, c\}$ و $\{a, b, c\}$ هم پیدا می‌کند که با اضافه کردن عضو c به هریک از زیر مجموعه‌های قبل، بدست می‌آید. روشن است که هر بار، با اضافه کردن عضو جدیدی به مجموعه، تعداد زیر مجموعه‌ها، دو برابر می‌شود. به این ترتیب، مجموعه‌ای که n عضو داشته باشد، 2^n زیرمجموعه خواهد داشت.

زیر مجموعه‌های يك مجموعهٔ محدود را می‌توان برحسب تعداد عضوهایی که در زیر مجموعه وجود دارد، منظم کرد. اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، زیر مجموعه‌هایی از آن که هر کدام شامل k عضو باشد، ترکیبهای n حرف k به k نامیده می‌شود و تعداد آنها به C_n^k نشان داده می‌شود. از آنجا که تعداد کل زیر مجموعه‌ها، مساوی 2^n است، تساوی زیر بدست می‌آید:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n$$

برای عدد C_n^k ، رابطه‌های جالب زیادی وجود دارد که بسیاری از آنها را می‌توان با بررسی زیرمجموعه‌هایی که خواص معینی دارند، بدست آورد. مثلاً رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (1)$$

با فرض $1 \leq k \leq n$. برای این منظور، بین همهٔ ترکیبهای k حرفی که از n عضو $a_1, a_2, \dots, a_n$ بدست می‌آید، آنهایی را انتخاب

می‌کنیم که شامل عضو a_n باشند. بقیه $1-k$ حرف در این ترکیبها، می‌توانند از $1-n$ عضو $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ انتخاب شده باشند. بنابراین تعداد ترکیبهایی که به این ترتیب بدست می‌آید، مساوی C_{n-1}^{k-1} خواهد شد. حالاً ببینیم چندترکیب k حرفی از n عضو $a_1, a_2, \dots, a_n$ باقی مانده است (که هیچکدام شامل عضو a_n نیستند). این ترکیبها از عضوهای $a_1, \dots, a_{n-1}$ تشکیل شده‌اند. چون در هر ترکیب k عضو وجود دارد. تعداد این ترکیبها مساوی C_{n-1}^k می‌شود. از آنجا که در هر ترکیب از نوع C_n^k ، یا عضو a_n وجود دارد و یا وجود ندارد، تساوی (۱) صحیح است.

متذکر می‌شویم که برای $n \geq 0$ داریم: $C_n^0 = 1$ ، زیرا هر مجموعه، تنها يك زیر مجموعه تهی دارد. همچنین روشن است که $C_n^n = 1$.
 با توجه به این نکته، می‌توان عدد C_n^k را به ترتیب حساب کرد؛ ابتدا برای $n=0$ ، بعد برای $n=1$ ، سپس $n=2$ و غیره. جدول عددهای C_n^k را معمولاً به این صورت می‌نویسند:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_0^0 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & C_1^0 & C_1^1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
 & & & & & & \\
 & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\
 & & & & & & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

که به مثلث پاسکال مشهور شده است.

چون $C_n^0 = C_n^n = 1$ ، بنابراین در ضلعهای مثلث پاسکال، فقط عدد ۱، وجود دارد. بقیه عددهای این جدول را هم، با توجه به تساوی (۱)، می‌توان پیدا کرد: هر عدد برابر است با مجموع دو عددی که در بالای سمت راست و سمت چپ آن قرار گرفته است. در نتیجه به این جدول

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & & \\
& & & & & & 1 & \\
& & & 1 & & 1 & & \\
& & & & 1 & 2 & 1 & \\
& & 1 & & 3 & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & 6 & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & 10 & 10 & 5 & & 1 \\
& \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

رابطه‌ای وجود دارد، که به کمک آن می‌توان، عدد C_n^k را مستقیماً بدست آورد. این رابطه چنین است:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

که در آن $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$ و $0! = 1$. از خواننده می‌خواهیم تحقیق کند که این رابطه، در تساوی (۱) و تساویهای $C_n^0 = C_n^n = 1$ صدق می‌کند.

مجموعه مرجع

به‌ندرت پیش می‌آید که در يك بحث، هم‌گفتگو از مجموعه همه عدهای مختلط باشد و هم از مجموعه همه بالنهای اقیانوس (از روشهای نظریه تابعهای متغیر مختلط، برای مطالعه حرکت بالنها در آب، استفاده می‌شود). معمولاً همه مجموعه‌هایی که در بحثهای مختلف، با آنها سرو کار داریم، زیرمجموعه‌ای از يك مجموعه ثابت I هستند. در چنین وضعی، مجموعه I را مجموعه مرجع می‌نامند.

مثلاً همه مجموعه‌های عددی، زیرمجموعه‌ای از مجموعه عدهای حقیقی هستند؛ مجموعه نقطه‌های يك شکل هندسی، زیر مجموعه‌ای از

مجموعه همه نقطه‌های فضای هندسی و مجموعه ضلعهای يك چند ضلعی مسطح ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه همه پاره‌خطهای واقع بر آن صفحه هستند و غیره .

مقطع (یا حاصلضرب منطقی) مجموعه‌ها

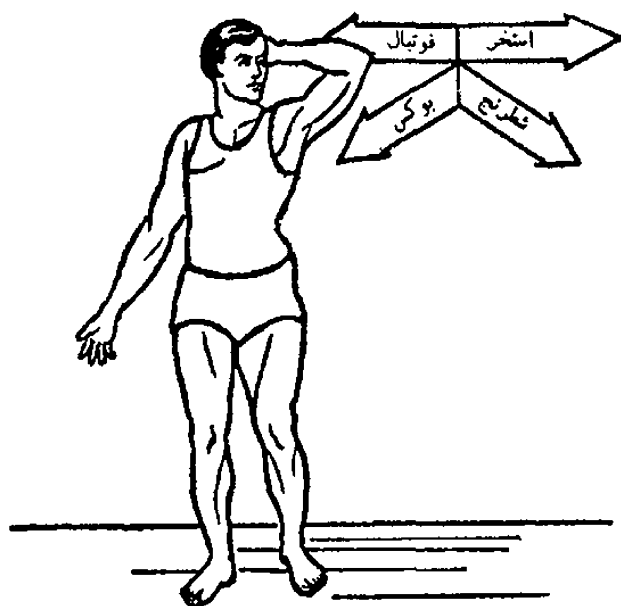
در سپتامبر سال ۱۸۸۷ ، شرلوک هولمز ، کارآگاه مشهور ، می-خواست نام يك کشتی بادی را معلوم کند^۱. او درباره این کشتی مطلب زیادی نمی‌دانست : این کشتی ، در ژانویه یا فوریه سال ۱۸۸۳ ، در پونديشری (*Pondichery* - در جنوب شرقی هندوستان) ، در ژانویه سال ۱۸۸۵ در بندر دندی (*Dindy* - در شمال شرقی بریتانیای کبیر در شوتلاند) ، و اکنون در بندرلندن است. شرلوک هولمز با استفاده از همین اطلاعات توانست نام کشتی را پیدا کند . برای این منظور کافی است سه مجموعه را با هم مقایسه کنیم : مجموعه کشتیهای بادی که در آن زمان در پونديشری بوده‌اند، مجموعه کشتیهای بادی که در ژانویه سال ۱۸۸۵ در دندی لنگر انداخته بودند ، و بالاخره مجموعه همه کشتیهای بادی که هم اکنون در لندن هستند . معلوم شد که تنها یکی از کشتیها عضو هر سه مجموعه‌اند : کشتی امریکایی «ستاره تنها». وقتی که شرلوک هولمز فهمید که جنایتکار امریکایی است ، توانست جنایت را کشف کند .

جستجوی عضوهای مشترك مجموعه‌ها ، تنها بکار کارآگاهها نمی‌خورد . دانشمند میکروب‌شناس که در پی انگیزه نوعی بیماری است، نزد یکی از بیمارها (که مبتلا به این بیماری است)، انواع میکروبها را مشاهده می‌کند ، نزد بیمار دوم ، انواع دیگری از میکروبها و نزد بیمار سوم ، انواع سوم میکروبها را می‌بیند . مجموعه میکروبهایی که در بیمارهای جداگانه مشاهده می‌شود ، مختلف است ، ولی معمولاً دو

(۱) برای اطلاع از تفصیل حادثه به داستان کونان دوئل به نام «پنج دانه سیب» مراجعه کنید .

یا سه میکروب در بیمارهایی که به این بیماری خاص مبتلا شده‌اند ، مشترک است . و به عنوان عامل بیماری ، به همین دو یا سه میکروب مشکوک می‌شوند . بررسیهای بعد روشن می‌کند که علت واقعی بیماری کدام است .

مجموعه‌ای که از عضوهای مشترک چند مجموعه A ، B ، C ، ... تشکیل شده باشد ، مقطع این مجموعه‌ها و یا حاصلضرب منطقی آنها نامیده می‌شود^۱ . مقطع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cap B$ یا $A \cap B$ نشان می‌دهند . به این ترتیب مقطع چند مجموعه A ، B ، C ، ... عبارت است از مجموعه جدیدی که تنها شامل همه عضوهایی باشد که در همه مجموعه‌های A ، B ، C ، ... وجود دارند .



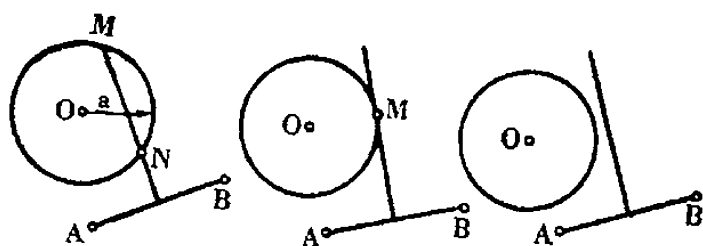
به کدام قسمت می‌رود ؟

مثلاً^۲ فرض کنید ، دانش‌آموزان يك دبیرستان در چهار رشته ورزشی کار می‌کنند : فوتبال ، شنا ، شطرنج و بوکس . بنابراین چهار

(۱) مقطع دو مجموعه را ، اشتراك آنها هم‌گویند.

مجموعه از دانش آموزان وجود دارد: مجموعه دانش آموزانی که فوتبال بازی می کنند، مجموعه دانش آموزانی که در ورزش شنا شرکت دارند و غیره. مقطع این مجموعه ها از دانش آموزانی تشکیل می شود که در عین حال در هر چهار ورزش کار می کنند.

* روشن است که در خود ریاضیات هم می توانیم کاربردهای زیادی برای مفهوم مقطع مجموعه ها، پیدا کنیم. یکی از اساسی ترین روشها، برای حل مسأله های مربوط به ساختمانهای هندسی، دوش مکانهای هندسی است. اگر بخواهیم نقطه ای بدست آوریم که در دو شرط صدق کند، ابتدا یکی از شرطها را نگه می داریم و شرط دوم را کنار می گذاریم. مجموعه نقطه هایی که در شرط اول صدق می کند، یک خط را به وجود می آورد (مکان هندسی نقطه ها). به همین ترتیب، مجموعه نقطه هایی که در شرط دوم صدق می کند، خط دیگری را به وجود می آورد. در این صورت، نقطه مورد نظر عبارت است از برخورد این دو خط (مکانهای هندسی). البته ممکن است که این دو خط، به جای یک نقطه، در چند نقطه مشترک باشند. در چنین حالتی، مسأله دارای چند جواب است. و اگر این خطها یکدیگر را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد. مثلاً فرض کنید بخواهیم نقطه C را چنان پیدا کنیم که از نقطه O به فاصله مساوی a ، و از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد. اولاً این نقطه بر محیط دایره به مرکز O و شعاع مساوی a قرار دارد؛ ثانیاً، این نقطه بر عمود منصف



شکل ۸

پاره خط AB واقع است. بنابراین، برای اینکه نقطه C را، با توجه به شرطهای مسأله پیدا کنیم، کافی است نقطه‌های برخورد خط عمود منصف را با دایره بدست آوریم، که البته ممکن است دو نقطه یا يك نقطه بدست آید و یا اصلاً نقطه برخوردی وجود نداشته باشد (شکل ۸ را ببینید).

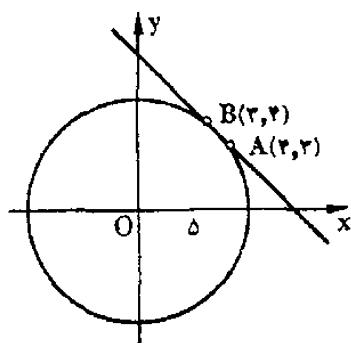
گاهی به مقطع مجموعه‌های شکلهای هندسی یا عددها برخورد می‌کنیم. مثلاً مجموعه همه مربعها عبارت است از مقطع مجموعه همه مستطیلها با مجموعه همه لوزیها. مجموعه مثلثهای متساوی‌الاضلاع عبارت است از مقطع مجموعه همه مثلثها با مجموعه چند ضلعیهای منتظم. مقطع مجموعه عددهای طبیعی قابل قسمت بر ۲ با مجموعه عددهای طبیعی قابل قسمت بر ۳، عبارت است از مجموعه عددهای طبیعی قابل قسمت بر ۶.

حل دستگاه معادله‌ها و نامعادله‌ها هم، در واقع، منجر به جستجوی مقطع چند مجموعه می‌شود (از عکس این مفهوم هم می‌توان صحبت کرد: مقطع چند مجموعه را می‌توان به کمک حل دستگاه معادله‌ها یا نامعادله‌ها، پیدا کرد). مثلاً فرض کنید بخواهیم دستگاه معادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (1)$$

از نظر جبری، باید همه زوج عددهای (x, y) را پیدا کنیم که با قرار دادن آنها در هر يك از معادله‌های دستگاه، به اتحاد برسیم. ولی معادله‌های دستگاه را می‌توان بطور جداگانه در نظر گرفت. M را مجموعه همه زوج عددهای (x, y) می‌گیریم که در معادله اول دستگاه صدق کنند، و مجموعه همه زوج عددهای (x, y) را که در معادله دوم دستگاه صدق می‌کنند، N می‌نامیم. در این صورت جوابهای دستگاه عبارت است از زوج عددهایی که هم متعلق به مجموعه M و هم متعلق به مجموعه N باشند. به عبارت دیگر، مجموعه جوابهای دستگاه (۱)

عبارت است از مقطع مجموعه‌های M و N .



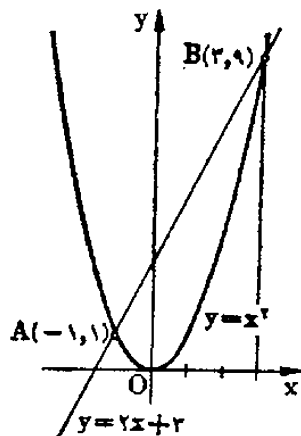
شکل ۹

این ملاحظه، در واقع همان روش هندسی حل دستگاه است، یعنی خط نمایش تغییرات هریک از معادله‌های دستگاه را رسم کنیم و محل برخورد آنها را بدست آوریم. مثلاً، می‌دانیم که اگر مختصات نقطه‌ای مانند $A(x, y)$ در معادله

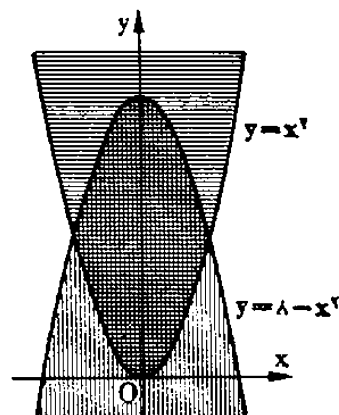
$x^2 + y^2 = 25$ صدق کند، بر محیط دایره‌ای به شعاع مساوی ۵ و مرکز مبدا مختصات، قرار دارد. معادله $x + y = 7$ هم معرف خط راستی است که روی هر دو محور مختصات پاره‌خطی به طول ۷ جدا می‌کند، اگر این دایره و خط را رسم کنیم، معلوم می‌شود که آنها در دو نقطه $A(4, 3)$ و $B(3, 4)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. به این ترتیب، دستگاه ما دو جواب دارد: $x_1 = 3, y_1 = 4$ و $x_2 = 4, y_2 = 3$ (شکل ۹). (فاصله داخل سطر) حالا، این دستگاه نامعادله‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 8 - x^2 \end{cases} \quad (2)$$

مجموعه M ، جوابهای نامعادله $y \geq x^2$ از نقطه‌های $A(x, y)$ تشکیل شده است که بر سهمی $y = x^2$ و بالای آن قرار دارند. مجموعه N ، جوابهای نامعادله $y \leq 8 - x^2$ شامل نقطه‌هایی از صفحه است که روی سهمی $y = 8 - x^2$ و پایین آن قرار دارند (شکل ۱۰). روی شکل ۱۰، مجموعه M را با خطهای افقی و مجموعه N را با خطهای قائم نشان داده‌ایم. جواب دستگاه (۲) عبارت است از مجموعه P ، مقطع مجموعه‌های M و N . روی شکل ۱۰، مجموعه P ، با هاشور قائم و افقی نشان داده شده است. ضمناً، نقطه‌های واقع بر مرزهای مجموعه P هم، متعلق به



شکل ۱۱



شکل ۱۰

این مجموعه است .

به همین ترتیب ، معلوم می شود که جواب دستگاه

$$\begin{cases} y > x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \quad (۳)$$

عبارت است از قطعه ای از خط $y = 2x + 3$ ، که در بالای سهمی $y = x^2$ قرار داشته باشد. خط، سهمی را در نقطه های $A(-1, 1)$ و $B(3, 9)$ قطع می کند و قطعه ای از خط که بین دو نقطه A و B واقع باشد، بالای سهمی قرار گرفته است. (خود نقطه های A و B متعلق به مجموعه جواب دستگاه نیست. شکل ۱۱ را ببینید.)

حالا به کمک روش مقطع مجموعه ها، ثابت می کنیم که معادله گنگ

$$\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{8x-x^2-15} = 7 \quad (۴)$$

جواب ندارد. البته می توان این معادله را با روش عادی جبر حل کرد، در پایان حل وقتی که ریشه های بدست آمده را در معادله (۴) آزمایش کنیم، معلوم می شود که این معادله، جواب ندارد. ولی ما روش دیگری در پیش می گیریم. ابتدا روشن می کنیم که هریک از رادیکالهای معادله، به ازای چه مقادیری از x ، معنا دارند. رادیکال $\sqrt{2+x-x^2}$ وقتی معنا

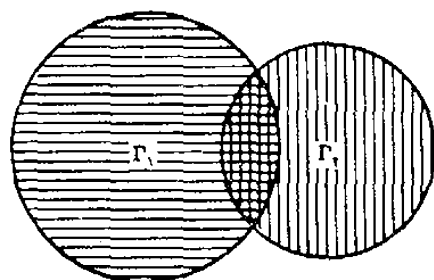
دارد که داشته باشیم: $x^2 - x + 2 \geq 0$. با حل این نامعادله بدست می آید $-1 \leq x \leq 2$. درست به همین ترتیب معلوم می شود که رادیکال $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ ، تنها وقتی معنا دارد که داشته باشیم: $3 \leq x \leq 5$. ولی پاره خطهای $-1 \leq x \leq 2$ و $3 \leq x \leq 5$ ، نقطه مشترکی ندارند، یعنی مقطع این دو مجموعه، يك مجموعه تهی است. به این ترتیب، حتی يك مقدار x هم نمی تواند در معادله (۴) صدق کند. *

اجتماع (یا حاصلجمع منطقی) مجموعه ها

خیلی قبل از آنکه به مقطع مجموعه ها برخورد کنیم، بایکی کردن آنها سروکار پیدا می کنیم. وقتی که دانش آموز سال اول دبستان، سه مداد را روی دو مداد می ریزد، دو مجموعه را یکی می کند، به عبارت دیگر اجتماع دو مجموعه را به وجود می آورد. بطور کلی عمل جمع عددهای طبیعی، با شمارش تعداد عضوهای دو مجموعه ای که با هم یکی می شوند، ارتباط دارد. ولی در اینجا باید به نکته باریکی توجه کرد. فرض کنید دو آلیاژ داشته باشیم. آلیاژ اول از آهن، کربن، و انادیوم و منگنز و آلیاژ دوم از آهن، کربن، کرم و نیکل درست شده باشد. در هر آلیاژ، ۴ عنصر شیمیایی وجود دارد؛ ولی اگر از مخلوط کردن آنها يك آلیاژ بسازیم، در آلیاژ جدید تنها ۶ عنصر وجود خواهد داشت؛ آهن، کربن، و انادیوم، منگنز، کرم و نیکل. نکته در اینجاست که آهن و کربن در هر دو آلیاژ وجود دارد؛ یعنی دو مجموعه ای را که با هم یکی کردیم، مقطعی غیر تهی دارند. بنابراین درست تر است که بگوییم: جمع عددهای طبیعی، با یکی کردن مجموعه های از هم جدا ارتباط دارد (دو مجموعه را از هم جدا گوییم که مقطع آنها، مجموعه ای تهی باشد).

وقتی که مقطع دو مجموعه، تهی نباشد، در یکی کردن آنها،

عضوهای تکراری ، تنها یکبار به حساب می آید . بنابراین اجتماع



شکل ۱۲

چند مجموعه B, A ، . . . به مجموعه جدیدی گفته می شود که عضوهای آن متعلق به يك یا چند مجموعه مفروض باشد . اجتماع (یا حاصلجمع منطقی) دو مجموعه

A و B را به صورت $A + B$ یا $A \cup B$

نشان می دهند . در شکل ۱۲ ، اجتماع دو مجموعه A (نقطه های داخلی دایره Γ_1) و B (نقطه های داخلی دایره Γ_2) نشان داده شده است .

وقتی که بعضی از اعضا به چند مجموعه تعلق داشته باشند ، در مجموعه اجتماع تنها يك مرتبه داخل خواهند شد .

به این ترتیب ، برای مجموعه های محدود ، تعداد عضوهای مجموعه حاصلجمع ، ممکن است از مجموع تعداد عضوهای جمله های جمع ، کمتر باشد . مثلاً فرض کنید ، مجموعه اول از حرف های مختلف الفبا تشکیل شده باشد که در این نیم بیت ناصر خسرو وجود دارد :

به محشر گرزبان از من نگیری

در این مجموعه ، ۱۱ حرف مختلف الفبا وجود دارد :

ب - ه - م - ح - ش - ر - گ - ز - ا - ن - ی

همچنین ، عضوهای مجموعه دوم عبارت باشد از حرف های مختلف الفبا ، که در نیم بیت دوم این شعر وجود دارد :

نیم عاجز من از گفت و شنودت

این مجموعه دوم ، ۱۳ عضو دارد :

ن - ی - م - ع - ا - ج - ز - گ - ف - ت - و - ش - د

از اجتماع این دو مجموعه ، مجموعه ای بدست می آید که ۱۷ عضو دارد

ب - ه - م - ح - ش - ر - گ - ز - ا - ن - ی - ع - ج - ف -

حرفهای «ن - ی - م - ا - ز - گ - ش» که در هر دو مجموعه وجود دارد (و مجموعه مقطع دو مجموعه را تشکیل می دهند) ، در مجموعه اجتماع ، تنها یکبار به حساب می آیند و به همین مناسبت ، مجموعه اجتماع دو مجموعه ، تنها ۱۷ عضو دارد ، نه $۱۳ + ۱۱$ ، یعنی ۲۴ عضو .

نمونه دیگری از اجتماع مجموعه‌هایی را می آوریم ، که دارای عضوهای مشترکی هستند . مجموعه همه دانش آموزان کلاس ، اجتماع این سه مجموعه است :

(الف) مجموعه دانش آموزانی که قبول شده‌اند ،

(ب) مجموعه دختران دانش آموز این کلاس ،

(ج) مجموعه پسران دانش آموزی که قبول نشده‌اند .

روشن است که هر دانش آموز کلاس ، لااقل به یکی از این سه مجموعه ، تعلق دارد . ولی این مجموعه‌ها ، می توانند عضوهای مشترکی داشته باشند : دختران دانش آموزی که قبول شده‌اند هم عضو مجموعه اول و هم عضو مجموعه دوم هستند .

گاهی تعداد جمله‌های جمع ، بی نهایت است . مثلاً ، A_n را مجموعه همه کسره‌های مثبت به مخرج n می گیریم :

$$A_1 = \left\{ \frac{m}{1} \right\} , A_2 = \left\{ \frac{m}{2} \right\} , \dots , A_n = \left\{ \frac{m}{n} \right\} , \dots$$

از اجتماع مجموعه‌های $A_1 , A_2 , \dots , A_n , \dots$ ، مجموعه همه کسره‌های مثبت ، یعنی کسرهایی به صورت $\frac{m}{n}$ بدست می آید (m و n عددهایی طبیعی هستند) .

همچنین ، اگر A_p را مجموعه همه مثلثهای متساوی الاضلاع ، A_q را مجموعه همه مربعها ، A_r را مجموعه همه پنج ضلعیهای منتظم و غیره

بگیریم ؛ از اجتماع آنها ، مجموعه A بدست می آید که مجموعه همه چندضلعیهای منتظم است .

* حالا درباره حاصلجمع منطقی مجموعهها ، درجبر صحبت می کنیم .
 ادگارپو نویسنده مشهور امریکایی ، در یکی از داستانهای خود می نویسد :
 « من هرگز به ریاضی دانی بر نخورده ام که بطور جدی و قاطع ، این اعتقاد را نداشته باشد که $x^2 + px + q$ بطور مطلق و بدون شرط مساوی صفر است . اگر مایل باشید ، به عنوان تجربه ، به یکی از این عالیجنابان بگویید که به نظر شما ، ممکن است حالتی وجود داشته باشد که $x^2 + px + q$ بطور کامل مساوی صفر نباشد ، ولی در همان حال که آنچه را فکر می کنید ، به او می فهمانید ، سعی کنید خود را از دسترس او دور نگه دارید ، زیرا بدون شك با شما دست به یقه خواهد شد. »

مسلماً خواننده می داند که $x^2 + px + q$ می تواند به ازای بعضی از مقادیر x مساوی صفر شود و به ازای بقیه مقادیر x ، مخالف صفر است . ولی در اینجا سؤال دیگری مطرح است : چرا ریاضی دانها همیشه کوشش می کنند معادله را به صورتی در آورند که یکی از دو طرف آن مساوی صفر باشد ؟ برای اینکه این مطلب روشن شود ، معادله $12 - x^2(x^2 - 7) = 0$ را در نظر می گیریم ، از اینکه حاصلضرب دو عبارت مساوی $12 -$ شده است ، به سختی می توان فهمید که هر يك از این عبارتها چقدر است . به همین مناسبت ، حل معادله ، در چنین وضعی ، خیلی دشوار است . درحالی که اگر $12 -$ را به سمت چپ معادله ببریم و عبارتی را که بدست می آید ، تجزیه کنیم ، به این معادله می رسیم :

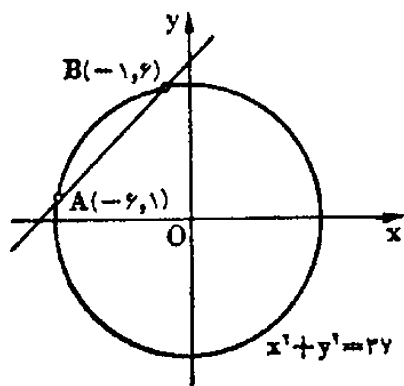
$$(x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0 \quad (1)$$

که در مورد آن می توان از حکم مشهور زیر استفاده کرد :

برای اینکه حاصلضربی مساوی صفر باشد ، باید لااقل یکی از عاملهای ضرب مساوی صفر شود .

به این ترتیب ، حل معادله (۱) به حل دو معادله $x^2 - 4 = 0$ و $x^2 - 3 = 0$ منجر می شود . ولی برخلاف حل دستگاه معادله ها ، در اینجا لازم نیست دنبال عددهایی برویم که در هر دو معادله صدق کند ، بلکه به عددهایی احتیاج داریم که لااقل در یکی از دو معادله صدق کند به عبارت دیگر در اینجا به جای مقطع ، با اجتماع مجموعه های ریشه ها سر و کار داریم . با حل معادله اول ، جوابهای $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ و با حل معادله دوم ، جوابهای $x_3 = \sqrt{3}$ و $x_4 = -\sqrt{3}$ بدست می آید . از اجتماع دو مجموعه $\{2, -2\}$ و $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ ، مجموعه $\{2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ ، ریشه های معادله مفروض پیدا می شود .
به همین ترتیب در مورد معادله

$$(x^2 + y^2 - 37)(y - x - 7) = 0 \quad (2)$$



شکل ۱۳

مجموعه جواب عبارت است از تمام نقطه های واقع بر محیط دایره $x^2 + y^2 = 37$ و خط راست $y = x + 7$ (شکل ۱۳) . در حالی که اگر به جای این معادله ، دستگاه معادله های

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 37 = 0 \\ y - x - 7 = 0 \end{cases}$$

داده شده بود ، تمام شکل ۱۳ به عنوان جواب بدست نمی آمد ، بلکه تنها دو نقطه $A(-6, 1)$ و $B(-1, 6)$ ، که در آنجا خط ، منحنی را قطع می کند ، پیدا می شد . *

در حالت کلی ، مجموعه‌هایی که با هم جمع می‌شوند ، می‌توانند عضوهای مشترك داشته باشند . ولی اغلب پیش می‌آید که يك مجموعه ، از اجتماع زیر مجموعه‌هایی از خودش به وجود آمده است ، به نحوی که هیچ دو زیر مجموعه‌ای ، عضوهای مشترك نداشته باشند (یا آنطور که معمولاً می‌گویند یکدیگر را قطع نکرده باشند ، یعنی مجموعه‌هایی از هم جدا باشند) . در این حالت گوییم : مجموعه A (وی زیر مجموعه‌های از هم جدا ، افراز شده است .

افراز يك مجموعه ، به زیر مجموعه‌ها ، اغلب برای طبقه بندی اشیاء به کار می‌رود . مثلاً وقتی که می‌خواهند کتابهای يك کتابخانه را منظم کنند ، مجموعه همه کتابها را به کتابهای ادبی ، کتابهای علوم اجتماعی - سیاسی ، کتابهای علوم طبیعی و غیره تقسیم (افراز) می‌کنند . در جانورشناسی ، مجموعه همه جانوران را به شاخه‌ها ، شاخه‌ها را به رده‌ها ، رده‌ها را به راسته‌ها ، راسته‌ها را به تیره‌ها ، تیره‌ها را به جنسها و جنسها را به نوعها تقسیم می‌کنند .

البته ، يك مجموعه را به طریقه‌های مختلف می‌توان به زیر مجموعه‌ها تقسیم کرد . مثلاً برای کتابهای يك کتابخانه ، فهرستی از نویسندگان آنها ، که به ترتیب حروف الفبا تنظیم شده است ، نیز وجود دارد : به این ترتیب که ابتدا مجموعه کتابها را به زیر مجموعه‌هایی تقسیم می‌کنند ، به نحوی که در زیر مجموعه اول کتابهایی قرار دارد که نام نویسندگان آنها با حرف «الف» شروع شده است ، در زیر مجموعه دوم کتابهایی که نام نویسندگان آنها با حرف «ب» شروع شده است و غیره . سپس هر يك از این مجموعه‌ها را به زیر مجموعه‌های جدیدی تقسیم کرده‌اند که بر حسب حرف دوم نام نویسندگان تنظیم شده است و غیره .

* برای افراز يك مجموعه ، به زیر مجموعه‌هایی از خود ، اغلب از

مفهوم عضوهای هم اذ استفاده می شود . برای این منظور ، ابتدا معنای «عضو x هم ارز است با عضو y » را تعریف می کنند و سپس عضوهای هم ارز را در يك زیر مجموعه قرار می دهند . ولی هر مفهوم هم ارزی ، برای افراز مناسب نیست . مثلاً تعریف هم ارزی را ، برای دونفر، آشنایی آنها بایکدیگر تعریف می کنیم . قبول چنین تعریفی برای هم ارزی ، بی نتیجه است ؛ زیرا می توان حالتی را در نظر گرفت که X آشنای Y و Y آشنای Z باشد ، در حالی که X و Z با هم آشنا نباشند . در این صورت در يك زیر مجموعه باید X و Y را قرار دهیم (آنها با هم آشنا هستند) ، سپس در همین زیر مجموعه باید Z را هم قرار داد (چون با Y آشناست) ؛ و به این ترتیب در يك زیر مجموعه ، دو عضو X و Z وجود دارد که با هم آشنا نیستند . برای اینکه به اینگونه حالت های نامناسب برنخوریم ، باید برای مفهوم هم ارزی ، سه شرط زیر را در نظر بگیریم :

الف) هر عضوی با خودش هم اذ باشد؛

ب) اگر عضو X هم اذ عضو Y است ، عضو Y هم ، هم اذ عضو X باشد؛

ج) اگر X هم اذ عضو Y و عضو Y هم اذ عضو Z است ، عضو X هم اذ عضو Z باشد .

می توان ثابت کرد که رعایت این شرطها ، برای افراز يك مجموعه A ، به زیر مجموعه هایی با عضوهای هم ارز ، لازم و کافی است (و البته زیر مجموعه های مختلف ، نباید عضوهای مشترکی داشته باشند).

مثلاً ، اگر دو عدد صحیح x و y را وقتی هم ارز بگیریم که تفاوت آنها عددی زوج باشد ، به سادگی معلوم می شود که هر سه شرط الف ، ب و ج برای آن صادق است و اگر عددهای هم ارز را در يك زیر مجموعه قرار دهیم ، مجموعه همه عددهای صحیح ، به دو زیر مجموعه افراز می شود : مجموعه عددهای زوج و مجموعه عددهای فرد * .

اگر m عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد، به کمک آن می‌توان مجموعه عددهای طبیعی را به ترتیب زیر، به دسته‌هایی افراز کرد. دو عدد را نسبت به مدول m ، همنهشت گوئیم، وقتی که تفاضل آنها بر m قابل قسمت باشد. مثلاً عددهای ۷ و ۱۹، نسبت به مدول ۴، همنهشت هستند، درحالی که نسبت به مدول ۵، همنهشت نیستند، زیرا $19 - 7 = 12$ یعنی ۱۲ بر ۴ قابل قسمت است، ولی بر ۵ قابل قسمت نیست. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که همنهشتی عددها، نسبت به مدول مفروض، دارای تمام خاصیت‌های هم‌ارزی است. بنابراین مجموعه عددهای صحیح را می‌توان به زیر مجموعه‌هایی افراز کرد که عددهای هر زیر مجموعه، نسبت به مدول m همنهشت باشند. تعداد این زیر مجموعه‌ها، مساوی m است و همه عددهای يك زیر مجموعه، در تقسیم بر m ، يك باقیمانده می‌دهند. مثلاً اگر فرض کنیم $m = 3$ ، سه زیر مجموعه، از مجموعه عددهای صحیح بدست می‌آید: مجموعه عددهای مضرب ۳؛ مجموعه عددهایی که در تقسیم بر ۳، باقیمانده‌ای مساوی ۱ می‌دهند و بالاخره مجموعه عددهایی که در تقسیم بر ۳، باقیمانده‌ای مساوی ۲ دارند.

حالا مجموعه جدید M را تشکیل می‌دهیم، که هر عضو آن مجموعه‌ای از عددهای همنهشت، نسبت به مدول m باشد. مجموعه M شامل m عضو خواهد بود. در این مجموعه می‌توان عملهای جمع و ضرب را در مورد عضوهای آن انجام داد. مثلاً $m = 5$ فرض کنید، مجموعه A را از عددهایی می‌گیریم که در تقسیم بر ۵، باقیمانده‌ای مساوی ۲ داشته باشند؛ و مجموعه B را از عددهایی که در تقسیم بر ۵ به باقیمانده ۴ برسند. اگر عدد دلخواهی از مجموعه A را، به عدد دلخواهی از مجموعه B اضافه کنیم، عددی بدست می‌آید که در تقسیم بر ۵، باقیمانده‌ای مساوی ۱ می‌دهد، زیرا داریم:

$$(5a+2) + (5b+4) = 5(a+b+1) + 1$$

بنا بر این می‌توان گفت که مجموع A و B عبارت است از مجموعه C ، عددهایی که در تقسیم بر ۵ به باقیمانده ۱ می‌رسند. اگر عدد دلخواهی از مجموعه A را در عدد دلخواهی از مجموعه B ضرب کنیم، عددی بدست می‌آید که در تقسیم بر ۵، باقیمانده‌ای مساوی ۳ می‌دهد، زیرا داریم:

$$(5a+2)(5b+4) = 5(5ab+4a+2b+1) + 3$$

حساب بسیار جالبی است، در این حساب به جای اینکه با مجموعه نامحدود عددهای صحیح سروکار داشته باشیم، تنها با پنج عضو سروکار داریم؛ پنج مجموعه عدد. هر مجموعه را به نام باقیمانده‌ای که عضوهای آن در تقسیم بر ۵ بدست می‌آورند، می‌نامیم (مثلاً مجموعه عددهای $\{ \dots, 16, 11, 6, 1, 4, \dots \}$ را به وسیله عدد ۱، نشان می‌دهیم). در این صورت برای «عددهای» ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، جدولهای جمع و ضرب زیر را خواهیم داشت:

جدول جمع

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

جدول ضرب

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

بخصوص این دو جدول برای حالت ساده $m=2$ بدست می‌آید:

+	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

×	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

جدول جمع نشان می دهد که مجموع دو عدد زوج یا مجموع دو عدد فرد مساوی يك عدد زوج و مجموع يك عدد زوج و يك عدد فرد مساوی يك عدد فرد است . جدول ضرب هم نشان می دهد که حاصلضرب دو عدد تنها وقتی فرد است که هر دو عامل ضرب ، فرد باشد . حساب مجموعه ها ، نسبت به يك مدول مفروض را در رشته ای از ریاضیات ، به نام نظریه عددها ، بررسی می کنند .

تفریق مجموعه ها

وادیك، بازرس پلیس، به گاوصندوق نظری انداخت، پپ خود را روشن کرد و گفت : «تنها پنج نفر ممکن است گاوصندوق را با مته برقی باز کرده باشند : آلك كونتسه، فریتس شمیت ، گوستاو هویگر ، هنریخ - كونتسمان و توماس مولر. ولی آلك ، فریتس و گوستاو هم اکنون در زندان موآپیت بسر می برند ، بنابراین هنریخ و توماس را بخواهید و ببینید دیشب کجا بوده اند . . . » .

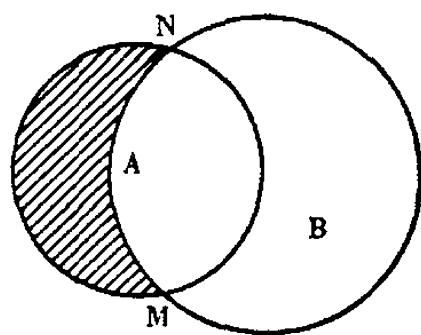
روشی که بازرس وادیك بکاربرده است براساس تفریق مجموعه ها قرار دارد . او با دو مجموعه سروکار دارد : مجموعه A ، دزدانی که از مته برقی استفاده می کنند؛ و مجموعه B ، همه ساکنین زندان موآپیت. او همه عضوهایی از مجموعه A را که متعلق به مجموعه B هم هستند ، کنار می گذارد و به این ترتیب ، دایره افراد مورد سوء ظن را تنگتر می کند .

بطور کلی تفاضل دو مجموعه A و B ، عبارت است از مجموعه جدید $A - B$ ، که در آن همه عضوهایی از مجموعه A ، که متعلق به مجموعه B نیستند، وجود دارد.

می بینیم، برای اینکه بتوان مجموعه B را از مجموعه A کم کرد، به هیچ وجه لازم نیست که مجموعه B ، جزئی از مجموعه A باشد. کم کردن B از A به معنی بیرون کردن عضوهای مشترک دو مجموعه A و B از مجموعه A است:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

مثلاً بازرس پلیس، باید از تعداد پنج دزد، سه نفری را که هم از متهم برقی استفاده می کنند و هم در آن زمان در زندان بسر می برند، کنار بگذارد. اگر در شکل ۱۴، A ،



شکل ۱۴

مجموعه همه نقطه های دایره اول و B ، مجموعه نقطه های دایره دوم باشد، تفاضل آنها عبارت است از مجموعه نقطه های هاشورخورده دایره A (بدون قوس MN). اگر A ، مجموعه همه دانش آموزان

یک کلاس و B ، مجموعه همه دختران دانش آموز مدرسه باشد، $A - B$ عبارت است از مجموعه همه دانش آموزان پسر که در این کلاس درس می خوانند.

در حالتی که B جزئی از مجموعه A است، $A - B$ را متمم مجموعه B نسبت به A گویند و به وسیله B'_A نشان می دهند. مثلاً متمم مجموعه عددهای زوج نسبت به مجموعه همه عددهای صحیح، عبارت است از مجموعه همه عددهای فرد. متمم مجموعه مربعها، نسبت به مجموعه مستطیلها، عبارت است از مجموعه مستطیلها با ضلعهای نامساوی.

و متمم همین مجموعه مربعها، نسبت به مجموعه لوزیها، عبارت است از مجموعه لوزیهای با قطرهای نامساوی.

اگر همه مجموعهها را به عنوان زیر مجموعههایی از مجموعه عمومی I در نظر بگیریم، معمولا منظور از متمم مجموعه B ، متمم آن نسبت به I است، در این حالت به جای B' بطور ساده B' می نویسند.

جبر مجموعهها

ما با عملهای اساسی روی مجموعهها آشنا شدیم: جمع (اجتماع)، تفریق و ضرب (مقطع یا اشتراك). این عملها دارای خاصیتهایی هستند، که خاصیتهای عملهای روی عددها را به خاطر می آورد. می دانیم که تمام جبرچند جمله ایها بر اساس چند قانونی که روی عددها اجرا می شود، ساخته شده است؛ این قانونها با تساویهای زیر نشان داده می شود:

$$a + b = b + a \quad (\text{الف})$$

(خاصیت جابجایی جمع).

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{ب})$$

(خاصیت شرکت پذیری جمع).

$$a + 0 = a \quad (\text{ج})$$

(خاصیت صفر - عضو خنثی در جمع).

$$a + (-a) = a - a = 0 \quad (\text{د})$$

(خاصیت عضوهای متقابل).

$$ab = ba \quad (\text{ه})$$

(خاصیت جابجایی ضرب).

$$(ab)c = a(bc) \quad (\text{و})$$

(خاصیت شرکت پذیری ضرب).

$$a(b+c) = ab+ac \quad (ز)$$

(خاصیت پخشى ضرب نسبت به جمع) .

$$a \times 1 = a \quad (ح)$$

(خاصیت واحد - عضو خنثی در ضرب) .

بیشتر این خاصیتها، برای عملهای روی مجموعه‌ها درست است، مثلاً، روشن است که برای هر دو مجموعه دلخواه A و B می‌توان نوشت:

$$A \cup B = B \cup A \quad (\text{هم } A \cup B \text{ و هم } B \cup A),$$

معرف يك مجموعه هستند که شامل عضوهایی است که متعلق به A یا B هستند و شامل هیچ عضو دیگری غیر آن نیست) . همچنین روشن است که

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

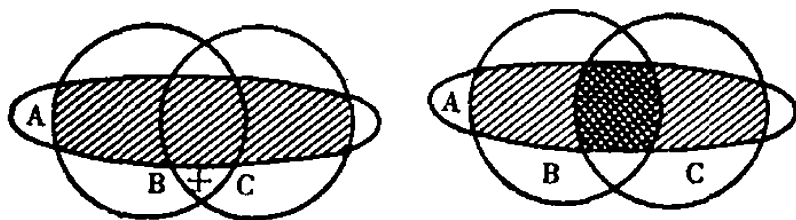
هر يك از این دو مجموعه، شامل عضوهایی است که متعلق به یکی از مجموعه‌های A ، B و C باشد.

همینطور ثابت می‌شود $A \cap B = B \cap A$ و $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (مجموعه‌های $A \cap B$ و $B \cap A$ ، از عضوهای مشترك دو مجموعه A و B و مجموعه‌های $(A \cap B) \cap C$ و $A \cap (B \cap C)$ ، از عضوهای مشترك سه مجموعه A ، B و C تشکیل شده است) .

اثبات خاصیت پخشى ضرب (اشتراك) نسبت به جمع (اجتماع) مجموعه‌ها، کمی مشکل‌تر است . در واقع باید ثابت کنیم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (۱)$$

اثبات منطقی این تساوی مشکل نیست، ولی کمی دقیق است. به‌همین مناسبت ما به رسم دو شکل، که این تساوی را روشن می‌کند،



شکل ۱۵

اکتفا می‌کنیم (شکل ۱۵). در یکی از این شکلها، مقطع مجموعه A با مجموعه $B \cup C$ آشورخورده است و در دیگری، مقطع A با B و A با C .
نقش صفر و واحد، در عملهای مربوط به مجموعه‌ها، به عمده مجموعه‌های ϕ (مجموعه تهی) و I (مجموعه عمومی) گذاشته شده است، یعنی داریم:

$$A \cup \phi = A, \quad A \cap \phi = \phi, \quad A \cap I = A$$

که متناظر تساویهای زیر، مربوط به عددها هستند:

$$a + 0 = a, \quad a \times 0 = 0, \quad a \times 1 = a$$

به این ترتیب جمع و ضرب منطقی (اجتماع و اشتراك) مجموعه‌ها همان خاصیت‌های جمع و ضرب عددها را دارند. بنابراین همه رابطه‌هایی که در جبر چند جمله‌ایها، تنها شامل جمع و ضرب هستند، درباره مجموعه‌ها هم صادق است. مثلاً اتحاد جبری

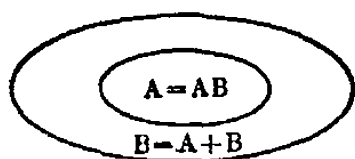
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

متناظر است با اتحاد

$$(A \cup B)^2 = A^2 \cup 2(A \cap B) \cup B^2$$

$$2(A \cap B) = A \cap B + A \cap B, \quad A^2 = A \cap A \quad \text{که در آن}$$

ولی جبر مجموعه‌ها، چهره دیگری هم دارد که با جبر چند جمله‌ایها متفاوت است. این تفاوت، اساساً مربوط به این نکته است که اگر یکی از دو مجموعه A و B ، زیرمجموعه دیگری باشد، رابطه‌های مربوط به اجتماع و اشتراك مجموعه‌ها، ساده می‌شود، یعنی، اگر داشته باشیم: $A \subset B$ ، داریم: $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$. این مطلب به روشنی در شکل ۱۶ دیده می‌شود.



شکل ۱۶

در حالت خاص، چون در

هر حال داریم $A \subset A$ ، بنابراین:

$A \cup A = A \cap A = A$ و چون

$A \subset I$ ؛ پس $A \cup I = I$.

به همین مناسبت می توان رابطه های جبر مجموعه ها را ساده کرد .
 مثلاً ، چون $A^2 = A$ ، $B^2 = B$ و $A \cap B \subset A$ ، بنابراین
 $A^2 + 2(A \cap B) = A + 2(A \cap B) = A$ و رابطه (۲) به صورت
 $(A \cup B)^2 = A \cup B$ در می آید. بطور کلی، در جبر مجموعه ها، صحبت
 از توان معنا ندارد ، زیرا به ازای هر مقدار n داریم : $A^n = A$.
 حالا ثابت می کنیم که برای مجموعه ها، قانون دیگری هم وجود
 دارد (قانون تفریق)، که نظیر آن در مورد عددها صادق نیست. این قانون
 چنین است :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

برای اثبات این رابطه، کافی است پراانتزهای طرف دوم را، طبق
 قاعده (۱) باز کنیم و توجه کنیم که مجموعه های $A \cap B$ و $A \cap C$ ، زیر
 مجموعه هایی از مجموعه A هستند : $A \cap B \subset A$ و $A \cap C \subset A$.
 علاوه بر آن $A \cap A = A$ است ، بنابراین

$$(A \cap A) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$$

بالاخره ، متذکر می شویم که عمل تفریق مجموعه ها، هیچ شباهتی
 به عمل تفریق عددها ندارد. برای هر سه عدد دلخواه a ، b و c ، این تساوی
 درست است :

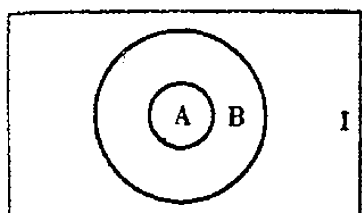
$$a + (b - c) = (a + b) - c$$

در حالی که برای سه مجموعه A ، B و C در حالت کلی

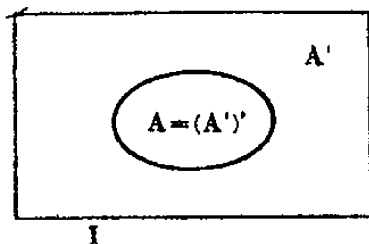
$$A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - C$$

مطلب بر سر این است که در جمع مجموعه ها، عضوهای تکراری را
 تنها یکبار به حساب می آوریم ، و در تفریق هم ممکن است چیزی از
 مجموعه اصلی کم نشود. مثلاً اگر هر سه مجموعه A ، B و C منطبق بر
 هم باشند : $A = B = C$ ، خواهیم داشت : $A \cup B = A$ و بنابراین
 $(A \cup B) - C = A - A = \phi$ ، يك مجموعه تهی ؛ در حالی که
 $A \cup (B - C) = A \cup \phi = A$

در نظریه مجموعه‌ها، عملیهایی هم هست که در عملیهای جبری وجود ندارد. این عملیهایی از رسیدن از مجموعه مفروض A به مجموعه متمم است: $A' = I - A$. روشن است که مجموعه‌های A و A' ، از هم جدا هستند و از مجموع آنها، مجموعه عمومی I بدست می‌آید. بنابراین $A \cup A' = I$ و $A \cap A' = \phi$. علاوه بر این روشن است که $\phi' = I$ (متمم مجموعه تهی، همان مجموعه عمومی است) و $I' = \phi$. بالاخره داریم $(A')' = A$ (شکل ۱۷).



شکل ۱۸



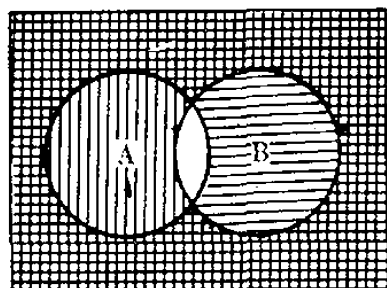
شکل ۱۷

حالا ثابت می‌کنیم که اگر $A \subseteq B$ باشد، داریم: $A' \supseteq B'$. در واقع، هرچه مجموعه‌ای بزرگتر باشد، تعداد عضوهای مجموعه متمم آن کمتر است. در شکل ۱۸، مجموعه عمومی I به شکل مستطیل و مجموعه‌های A و B به شکل دایره نشان داده شده است. متمم مجموعه A شامل نقطه‌هایی از مستطیل است که در خارج دایره کوچکتر قرار دارند. در حالی که متمم مجموعه B ، شامل نقطه‌هایی از مستطیل است که در خارج دایره بزرگتر قرار گرفته‌اند و روشن است که $A' \supseteq B'$. اثبات رابطه‌های زیر کمی مشکل‌تر است:

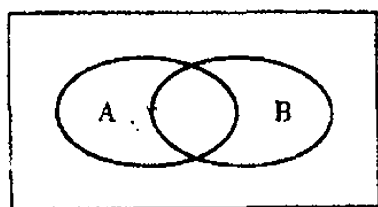
$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

روی شکل ۱۹، متمم مجموعه A را با خطهای افقی و متمم مجموعه B را با خطهای قائم هاشور زده‌ایم. متمم مجموعه $A \cup B$



شکل ۱۹



شکل ۲۰

شامل نقطه‌هایی از مستطیل است که در داخل هیچیک از دو دایره قرار نگرفته باشد. اینها همان نقطه‌هایی هستند که با هر دو نوع هاشور مشخص شده است، یعنی نقطه‌های $A' \cap B'$. به این ترتیب

روشن می‌شود که: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

به همین ترتیب می‌توان با توجه به شکل ۲۰، رابطه $(A \cap B)' = A' \cup B'$ را به سادگی روشن کرد.

با تعدادی از خاصیت‌های

عمل با مجموعه‌ها، آشنا شدیم. بهتر است که این خاصیت‌ها را خلاصه کنیم (می‌دانیم که معمولاً مجموعه تهی را با ϕ ، مجموعه عمومی را با I ، متمم مجموعه A را نسبت به مجموعه عمومی با A' نشان می‌دهند):

$$(۱) A \subset A$$

$$(۲) \text{ اگر داشته باشیم } A \subset B \text{ و } B \subset A, \text{ خواهیم داشت: } A = B$$

$$(۳) \text{ اگر داشته باشیم } A \subset B \text{ و } B \subset C, \text{ خواهیم داشت: } A \subset C$$

$$(۴) \phi \subset A$$

$$(۵) A \subset I$$

$$(۶) A \cup B = B \cup A$$

$$(۷) A \cap B = B \cap A$$

$$(۸) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$(۹) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$(۱۰) A \cup A = A$$

$$. A \cap A = A \quad (۱۱)$$

$$. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (۱۲)$$

$$. A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C) \quad (۱۳)$$

$$. A \cup \phi = A \quad (۱۴)$$

$$. A \cap I = A \quad (۱۵)$$

$$. A \cup I = I \quad (۱۶)$$

$$. A \cap \phi = \phi \quad (۱۷)$$

(۱۸) رابطه $A \subset B$ هم ارز است با هریک از دو رابطه $A \cup B = B$ و

$$. A \cap B = A$$

$$. A \cup A' = I \quad (۱۹)$$

$$. A \cap A' = \phi \quad (۲۰)$$

$$. \phi' = I \quad (۲۱)$$

$$I' = \phi \quad (۲۲)$$

$$. (A')' = A \quad (۲۳)$$

(۲۴) رابطه $A \subset B$ هم ارز است با $B' \subset A'$.

$$. (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (۲۵)$$

$$. (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (۲۶)$$

بین خاصیت‌های ۱ تا ۲۶، هر جا که یکی از «رابطه‌های دوگان»

$$\subset, \supset$$

$$\phi, I$$

$$\cup, \cap$$

وجود داشته باشد، می‌توان از يك رابطه، رابطه دیگری را بدست آورد. مثلاً از این راه می‌توان از رابطه (۶) به رابطه (۷) و از رابطه (۱۲) به رابطه (۱۳) رسید و غیره.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اگر قضیه‌ای را از رابطه‌های ۱ تا ۲۶ بدست آوریم، حتماً قضیه دیگری را هم که دوگان این قضیه است، می‌توان بدست آورد.

بدیهی است که به خاطر سپردن همهٔ رابطه‌های ۱ تا ۲۶ خیلی ساده نیست، ولی این کار لازم هم نیست، می‌توان خود را به دو عمل اساسی محدود کرد: اجتماع مجموعه‌ها و تشکیل متمم، که سه رابطه زیر برای آنها کافی است:

$$A \cup B = B \cup A \quad (a)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (b)$$

$$(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A \quad (c)$$

حالا عمل حاصلضرب منطقی $A \cap B$ ، رابطه $A \subseteq B$ و مجموعه‌های I و ϕ را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$A \cap B \text{ طبق تعریف برابر است با } (A' \cup B')' ;$$

$$A \subseteq B \text{ طبق تعریف یعنی } A \cup B = B ;$$

$$I = A \cup A' \text{ و } \phi = I' .$$

در این صورت تمام خاصیت‌های ۱ تا ۲۶ را می‌توان از رابطه‌های a تا f بدست آورد.

سیارهٔ افسانه‌ها

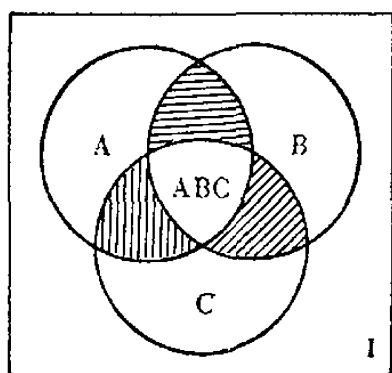
يك روز، موقع صرف قهوه در باشگاه مسافران بین كهكشانها، ایون تیخی^۱، عضو برجستهٔ این باشگاه نقل می‌کرد:

«پیاده شدن در سیارهٔ گسیودخیلی مشکل بود. ولی وقتی روی سطح سیاره فرود آمدم، از اینکه تصمیم به دیدن آنجا گرفته بودم، پشیمان شدم: در آنجا موجوداتی زندگی می‌کردند که عجیب‌تر از خدایان افسانه‌ای یونان قدیم بودند. يك هیئت ۱۰۰۰ نفری از ساکنین سیاره، به استقبال من آمدند. ۸۱۱ نفر از آنها دارای يك چشم بودند، مثل

۱) مسافرت ایون تیخی راستانیسلاویم، نویسندهٔ مشهور لهستانی در کتاب «یادداشت‌های روزانهٔ ایون تیخی در ستاره‌ها» شرح داده است. نویسنده «داستان مجموعه‌ها» امیدوار است که ستانیسلاویم، او را به خاطر تقلید ناشیانه‌ای که از نوشتهٔ او کرده است، ببخشد و ضمناً خوانندهٔ این کتاب، نارساییهای ادبی این قسمت را به حساب سر. لم نگذارد.

پلی فم غول؛ ۷۵۲ نفر، به جای موهایشان، مار بود، مثل مدوزی گودگودن، ۴۱۸ نفرشان دمی مثل دم ماهی داشتند، مثل دختران دریا. ضمناً ۵۷۰ نفر از این عجیب الخلقه ها، هم يك چشم بودند و هم به جای مو، مار بر سرشان بود؛ ۳۶۵ نفرشان يك چشم بودند و دم ماهی داشتند؛ ۳۴۸ نفر به جای موی سر، مار و دم ماهی داشتند و بالاخره ۲۹۷ نفرشان، هم يك چشم بودند و هم به جای موی سر، مار داشتند و هم دمشان مثل دم ماهی بود. بزرگترین آنها به طرف من آمد و گفت

ولی اعضای باشگاه نفهمیدند، ایون تیخی درسیاره عجایب چه شنید، پروفیسور قاداتوف، که به داستان مسافر گوش می کرد، بلافاصله در ذهن خود برآوردی کرد و با صدای بلند گفت :



شکل ۲۱

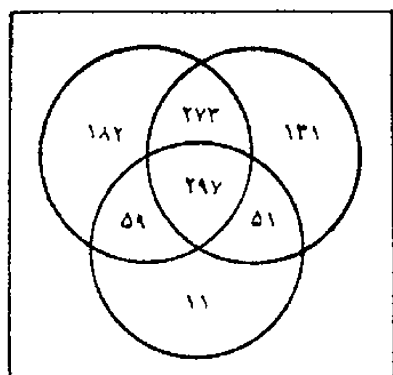
« ایون عزیز ! من حاضرم امتحان کنیم که در این سیاره چند نفر فقط يك چشم دارند، چند نفر فقط به جای موها، مار دارند و چند نفر فقط دمی شبیه دم ماهی دارند. من امیدوارم که لااقل قانونهای ریاضیات در این سیاره به افسانه تبدیل نشده باشد.»

قاداتوف يك دستمال کاغذی از روی میز برداشت، روی آن طرح شکل ۲۱ را رسم کرد و گفت :

«مجموعه همه اعضای هیئت نمایندگی را به I ، مجموعه يك چشمیها را به A ، مجموعه مارموها را به B و بالاخره مجموعه دم ماهیها را به C نشان می دهیم. مجموعه I را به شکل مستطیل و سه مجموعه دیگر را با دایره، مشخص کرده ایم. سه دایره، مستطیل را به ۸ قسمت تقسیم کرده اند. ببینیم در هر يك از این قسمتها چند عضو

وجود دارد. طبق فرض در مجموعه $A \cap B$ (یا بطور ساده AB)، 57° ، عضو وجود دارد (که يك چشم و مارمو هستند)، مجموعه $A \cap B \cap C$ (یا بطور ساده ABC)، 297 عضو دارد (يك چشم، مارمو و دم ماهی). بنابراین در مجموعه $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$ 273 عضو باید باشد. این همان مجموعه‌ای است که در شکل ۲۱ با خطهای افقی هاشور خورده است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموعه $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ، 59 عضو (که در شکل ۲۱ با خطهای قائم هاشور خورده) و مجموعه $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ، 51 عضو (در شکل ۲۱ با خطهای مایل هاشور خورده) دارد.

حالا به سادگی می‌توان قسمتی از مجموعه A را که متعلق به $B \cup C$ نیست، از لحاظ عددی مشخص کرد. برای این منظور باید از عدد 811 ، عددهای 57° (مربوط به مجموعه $A \cap B$) و 59 (مربوط به مجموعه $(A \cap C) - (A \cap B \cap C)$) را کم کرد. 182 موجود باقی می‌ماند

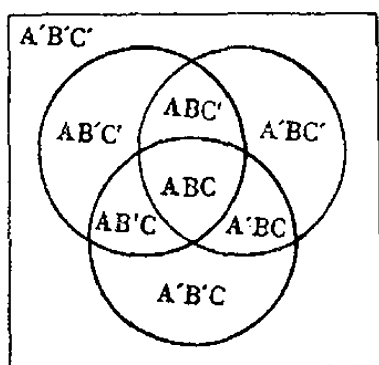


شکل ۲۲

که يك چشم هستند، ولی نه به جای موها، مار دارند و نه دمشان شبیه دم ماهی است. با همین روش معلوم می‌شود که در مجموعه $B - (A \cup C)$ ، 131 موجود و در مجموعه $C - (A \cup B)$ ، 11 موجود وجود دارد. این نتیجه‌ها، در شکل ۲۲ نشان داده شده است.

حالا ببینیم در این هیئت نمایندگی چند نفر بوده‌اند که نه يك چشم، نه مارمو و نه دم ماهی نبوده‌اند، به عبارت دیگر می‌خواهیم تعداد عضوهای مجموعه $I - A - B - C$ را پیدا کنیم. از آنجا که مجموعه‌های جداگانه‌ای که در شکل ۲۲ نشان داده شده است، اشتراکی ندارند، باید

بطور ساده از عدد ۱۰۰۰، مجموع $11 + 131 + 182 + 51 + 59 + 273 + 297$ را کم کنیم. ولی این مجموع برابر است با ۱۰۰۴ و بنابراین مجموعه $I - A - B - C$ دارای ۴ - عضو می شود. ولی ایون عزیز قبول کن که حتی در سیاره افسانه ها هم نمی تواند مجموعه ای با تعداد عضوهای منفی وجود داشته باشد.



شکل ۲۳

هایی از هم جدا هستند. ولی این تجزیه را به ترتیب دیگری هم می توان بدست آورد. می دانیم:

$$I = A \cup A' = B \cup B' = C \cup C'$$

و بنابراین

$$I = (A \cup A') \cap (B \cup B') \cap (C \cup C') = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C')$$

مجموعه I به ۸ زیر مجموعه تجزیه شد و اینها همان زیر مجموعه هایی هستند که قبلاً پروفیسور تارانتوف بدست آورده بود (شکل ۲۳).

از این رابطه، بلافاصله بدست می آید:

$$N(A' \cap B' \cap C') = N(I) - N(A \cap B \cap C) - N(A \cap B \cap C') - N(A \cap B' \cap C) - N(A \cap B' \cap C') - N(A' \cap B \cap C) - N(A' \cap B \cap C') - N(A' \cap B' \cap C)$$

که در آن $N(D)$ یعنی تعداد عضوهای مجموعه D . این رابطه را می توان

طوری تبدیل کرد که شامل A' ، B' و C' ، متممهای A ، B و C نباشد. برای این منظور C' را به $I - C$ تغییر می دهیم، بدست می آید:

$$A \cap B \cap C' = A \cap B \cap (I - C) = A \cap B - A \cap B \cap C$$

و بنابراین:

$$N(A \cap B \cap C') = N(A \cap B) - N(A \cap B \cap C);$$

$$N(A \cap B' \cap C') = N(A \cap B') - N(A \cap B' \cap C); \dots$$

سپس B' را به $I - B$ و بالاخره A' را به $I - A$ تبدیل می کنیم، سر آخر به این رابطه می رسیم:

$$N(A' \cap B' \cap C') = N(I) - N(A) - N(B) - N(C) + N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C) - N(A \cap B \cap C)$$

از این رابطه می توان برای حل مسأله هایی از نوع مسأله بالا استفاده کرد.

مثلاً تارانتوف می تواند با توجه به این رابطه، نتیجه بگیرد:

$$N(A' \cap B' \cap C') = 1000 - 811 - 752 - 418 + 570 + 356 + 348 - 297 = -4$$

نمونه دیگری درباره محاسبه عددی مجموعه های محدود می آوریم. این مسأله متعلق به لوئیس کرول، مؤلف کتاب آلیس در سرزمین عجایب است. این مطلب جالب است که دو جسون ریاضی دان زیر نام مستعار لوئیس کرول این مطالب را نوشته است.

کرول در یکی از داستانهای خود، این مسأله را می آورد:

«در يك نبرد سخت، از ۱۰۰ راهزن، ۷۰ نفر يك چشم خود را از دست دادند، ۷۵ نفر يك گوش، ۸۰ نفر يك دست و ۸۵ نفر يك پای خود را. حداقل چند نفر از آنها هم چشم، هم گوش، هم دست و هم پای خود را از دست داده اند؟»

مجموعه آدمهای يك چشم را A ، مجموعه آدمهای يك گوش را B ، مجموعه آدمهای يك دست را C و بالاخره مجموعه آدمهای يك پا را

D می‌نامیم. مسأله می‌خواهد که مجموعه $A \cap B \cap C \cap D$ را تخمین بزنیم. روشن است که تمام مجموعه عمومی I ، تشکیل شده است از این مجموعه $A \cap B \cap C \cap D$ و از راهزنی‌هایی که یا هر دو چشم، یا هر دو گوش، یا هر دو دست و یا هر دو پای خود را حفظ کرده‌اند. بنابراین:

$$I = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup (A \cap B \cap C \cap D)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که تعداد عضوهای مجموعه I نمی‌تواند کمتر از مجموع تعداد عضوهای مجموعه‌های A' ، B' ، C' ، D' و $A \cap B \cap C \cap D$ باشد (تعداد عضوهای مجموعه I وقتی مساوی مجموع تعداد عضوهای این مجموعه‌هاست که مجموعه‌های A' ، B' ، C' و D' ، دو به دو از هم جدا باشند). ولی تعداد عضوهای مجموعه A' مساوی ۳۰، مجموعه B' مساوی ۲۵، مجموعه C' مساوی ۲۰ و مجموعه D' مساوی ۱۵ است. چون تعداد عضوهای مجموعه عمومی (یا مرجع) مساوی ۱۰۰ است، داریم:

$$100 \leq 30 + 25 + 20 + 15 + N(A \cap B \cap C \cap D)$$

و از آنجا:

$$N(A \cap B \cap C \cap D) \geq 100 - 30 - 25 - 20 - 15 = 10$$

به این ترتیب لااقل ۱۰ نفر از راهزنها، هم چشم، هم گوش، هم دست و هم پای خود را از دست داده‌اند.

جبر بول *

در ریاضیات، به عنصرهای دیگری هم، غیر از مجموعه‌ها، بر می‌خوریم، که درباره آنها عملهای جمع و ضرب به نحوی تعریف شده‌اند که با شرطهای ۱ تا ۲۶ سازگارند. این دستگاهها در سال ۱۸۴۷، به وسیله بول ریاضی‌دان انگلیسی، مورد مطالعه قرار گرفت، به همین مناسبت، اینگونه دستگاهها، را جبر بول می‌نامند. ولی وقتی که این

(۱) اقل لیلیان ووی نیچ، نویسنده کتاب معروف «خزمکس»، دختر همین بول ریاضی‌دان است.

نامگذاری کاملاً جای خود را باز کرده بود ، معلوم شد که قبل از بول، در سال ۱۶۸۵ ، جبری با همین قانونها به وسیله برادران برنولی مورد بررسی قرار گرفته بود .

دلیل اینکه برادران برنولی و بول، به يك مطلب توجه کردند، کاملاً قابل فهم است: همه آنها به جبر منطقی علاقمند بودند که امکان می داد قضاوتها و بیانها را به شکل جبری عرضه کرد . و جبر بول، وسیله ای است که درست در همین جهت خدمت می کند . عبارتها را در منطق ریاضی، گزاره می گویند که می تواند درست یا نادرست باشد. به این مناسبت در واقع، منطق به این پرسش علاقه ای ندارد که آیا يك گزاره درست است یا نادرست. در منطق ریاضی تنها در این باره بحث می کنند که با چه قانونهایی می توان از گزاره های مفروض، گزاره های مرکب تری بدست آورد و چگونه از درستی و نادرستی گزاره های اصلی، درستی و نادرستی گزاره های مرکب معلوم می شود .

روی گزاره ها ، عملهای زیر را می توان انجام داد :

(۱) نقض - که گزاره مفروض X را به گزاره نقیض آن $\bar{X}$ تبدیل می کند . نقیض يك گزاره وقتی درست است که گزاره مفروض نادرست باشد و وقتی نادرست است که گزاره X درست باشد .

(۲) ترکیب عطفی - که از دو گزاره مفروض X و Y ، گزاره سوم $X \wedge Y$ را به وجود می آورد و تنها درحالتی درست است که هر دو گزاره X و Y درست باشند .

(۳) ترکیب فصلی - که از دو گزاره مفروض X و Y ، گزاره سوم $X \vee Y$ را به وجود می آورد و درحالتی درست است که لااقل یکی از دو گزاره مفروض درست باشد .

(۴) ترکیب شرطی - که از دو گزاره مفروض X و Y ، گزاره سوم $X \Rightarrow Y$ را به وجود می آورد و تنها درحالتی نادرست است که X درست

در بسیاری موارد، يك گزاره به معنای آن است که عضوی مانند x ، به زیر مجموعه A از يك مجموعه عمومی I تعلق دارد. در این مورد، عملهای ۱ تا ۴ روی گزاره‌ها، متناظر با عملهای مشخصی روی مجموعه‌ها است. مثلاً نقیض گزاره $\langle x \in A \rangle$ عبارت است از گزاره $\langle x \in A' \rangle$. به این ترتیب، بدست آوردن متمم A ، متناظر است با نقیض گزاره $\langle x \in A \rangle$. به همین ترتیب، عمل اشتراك یا مقطع مجموعه‌های A و B ، متناظر است با ترکیب عطفی گزاره‌های $\langle x \in A \rangle$ و $\langle x \in B \rangle$ ؛ عمل اجتماع مجموعه‌ها، متناظر است با ترکیب فصلی؛ و رابطه $A \subset B$ ، متناظر است با ترکیب شرطی $\langle x \in A \rangle$ و $\langle x \in B \rangle$. ضمناً گزاره $\langle x \in I \rangle$ همیشه درست و گزاره $\langle x \in \phi \rangle$ همیشه نادرست است.

از آنچه گفتیم بطور طبیعی برمی آید که قانونهای ۱ تا ۲۶ نه تنها برای مجموعه‌ها، بلکه برای گزاره‌ها هم صحیح است، به شرطی که مفهوم $A \cap B$ را به عنوان ترکیب عطفی گزاره‌ها؛ $A \cup B$ را به عنوان ترکیب فصلی گزاره‌ها؛ A' را به عنوان نقیض گزاره A ؛ $A \subset B$ را به عنوان ترکیب شرطی گزاره‌ها؛ I را به عنوان گزاره همیشه درست و ϕ را به عنوان گزاره همیشه نادرست بپذیریم. به این ترتیب، فرضهای «درست - گزاره»، جبر را نسبت به عملهای ۱ تا ۴ به وجود می آورد.

ولی جبر بول را با روشهای دیگری هم می توان ساخت (بدون توجه به گزاره‌ها). مثلاً همه انواع ممکنه دنباله‌ای را که شامل n رقم باشد، در نظر می گیریم، به نحوی که هر رقم آن مساوی صفر یا يك باشد. جمع و ضرب دو نمونه از این دنباله را «با روش مختصاتی» تعریف می کنیم، ضمناً جدولهای جمع و ضرب را به این صورت ترتیب می دهیم:

	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

جمع منطقی

	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

ضرب منطقی

مثلاً

$$(۱, ۰, ۰, ۰, ۱) + (۱, ۱, ۱, ۰, ۱) = (۱, ۱, ۱, ۰, ۱),$$

$$(۱, ۰, ۰, ۰, ۱) \cdot (۱, ۱, ۱, ۰, ۱) = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱)$$

سپس ، اگر $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، وقتی $x \subseteq y$ می گیریم که برای هر مختصات داشته باشیم: $x_k \leq y_k$. اگر در دنباله ، ۰ را به ۱ و ۱ را به ۰ تبدیل کنیم ، دنباله جدیدی بدست می آید که آنرا x' می نامیم . بالاخره ϕ را به وسیله دنباله $(۰, ۰, \dots, ۰, ۰)$ و I را به وسیله دنباله $(۱, ۱, \dots, ۱, ۱)$ نشان می دهیم. از خواننده می خواهیم ، قانونهای ۱ تا ۲۶ را برای عملهای روی دنباله ها آزمایش کند .

نمونه جالبی از جبر بول را به این ترتیب می توان بدست آورد که همه مقسوم علیه های طبیعی يك عدد طبیعی N را ، که از حاصل ضرب چند عدد اول مختلف بدست آمده است ، در نظر بگیریم . به عنوان عمل جمع مقسوم علیه ها ، تشکیل کوچکترین مضرب مشترك این مقسوم علیه ها ، و به عنوان عمل ضرب ، تشکیل بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها را انتخاب می کنیم . متمم مقسوم علیه n را ، عدد $n' = \frac{N}{n}$ می-

گیریم . بالاخره $n \subseteq m$ به حساب می آوریم ، وقتی که m بر n قابل قسمت باشد . به سادگی می توان تحقیق کرد که این عملها با شرطهای ۱ تا ۲۶ از نظر «جبر مجموعه ها» سازگارند، ضمناً نقش مجموعه تهی ϕ به عهده عدد ۱ ، و نقش مجموعه عمومی I به عهده عدد N است .

مثلا اگر $N = 30$ بگیریم، جبر بول از عددهای $(10, 15, 30)$ و $(1, 2, 3, 5, 6)$ تشکیل شده است. «مجموع» مقسوم علیه‌های ۲ و ۵ برابر است با ۱۰، و «حاصلضرب» آنها برابر است با ۱. متمم مقسوم علیه ۳ عبارت است از ۱۰، زیرا داریم: $3' = 30 \div 3 = 10$. بالاخره $5 \subset 15$ ، زیرا ۱۵ بر ۵ قابل قسمت است.

۲

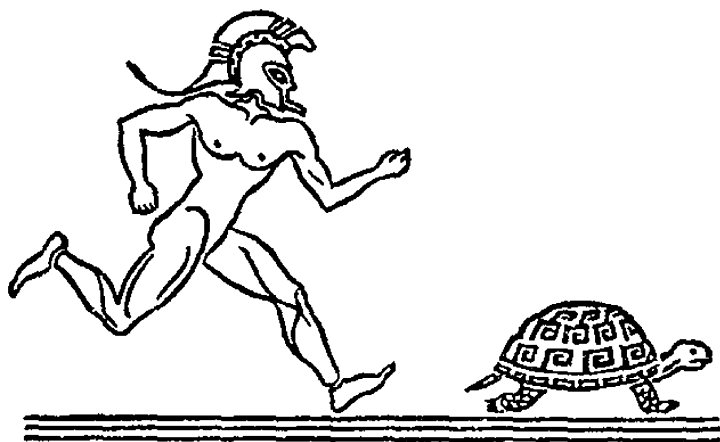
دنیای شگفت آور بی نهایت

رازهای بی‌نهایت

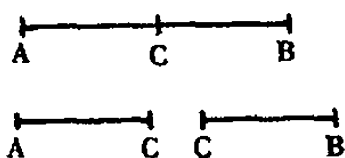
بدون هیچ مبالغه‌ای می‌توان گفت که فکر بی‌نهایت در تمام ریاضیات نفوذ کرده است. در ریاضیات، معمولاً به اشیاء جداگانه (عددها یا شکل‌های هندسی) علاقه‌ای ندارند، بلکه دسته‌کاملی از آنها را مورد بررسی قرار می‌دهند: همه‌ی عددهای طبیعی، همه‌ی عددها و غیره، که در این صورت از مجموعه‌ی عضوهای جداگانه‌ی بی‌شمار تشکیل شده‌اند. به همین مناسبت ریاضی‌دانها و فیلسوفها، همیشه به مفهوم بی‌نهایت علاقه‌مند بوده‌اند. این علاقه از همان زمانی به وجود آمد که معلوم شد بعد از هر عدد طبیعی، عدد طبیعی دیگری قرار گرفته است، یعنی رشته‌ی عددها نامحدود است. ولی نخستین آزمایشهای مربوط به آموزش بی‌نهایت، منجر به معماهای زیادی شد.

مثلاً، (نون، فیلسوف یونانی، با استفاده از مفهوم بی‌نهایت، ناممکن بودن حرکت را ثابت کرد. او می‌گفت، برای اینکه تیر بتواند فاصله‌ای را طی کند، ابتدا باید از نیم اول راه بگذرد، ولی قبل از آنکه نیم اول راه را طی کند، باید از یک‌چهارم اول راه، از یک‌هشتم آن و غیره بگذرد. چون عمل نصف کردن هرگز تمام نمی‌شود (بی‌نهایت بار می‌شود آنرا نصف کرد)، بنابراین تیر هم هرگز نمی‌تواند از جای خود تکان بخورد. به همین ترتیب، او ثابت کرد که آشیل تندپا، هرگز نمی‌تواند به لاک‌پشت برسد.

به علت همین معماها و سفسطه‌ها بود که ریاضی‌دانهای یونان قدیم،



از برخورد با بی‌نهایت فرار می‌کردند و آنرا از بررسیهای ریاضی خود کنار گذاشته بودند. بعضی از فیلسوفها اعتقاد داشتند که هر شکل هندسی از تعداد محدودی قسمتهای بسیار کوچک تقسیم نشدنی (اتمها) تشکیل شده است. نظریه اتمی به سادگی معمای زنون را حل می‌کند، زیرا بنا بر نظریه اتمی، بی‌نهایت تقسیم متوالی ممکن نیست؛ تقسیم را تنها تا اتمها می‌توان انجام داد و از آن به بعد، دیگر تقسیم ممکن نیست. ولی در این نظریه مشکل دیگری وجود داشت. اگر تعداد قسمتهای تقسیم نشدنی یک پاره خط، فرد باشد، نمی‌توان آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم

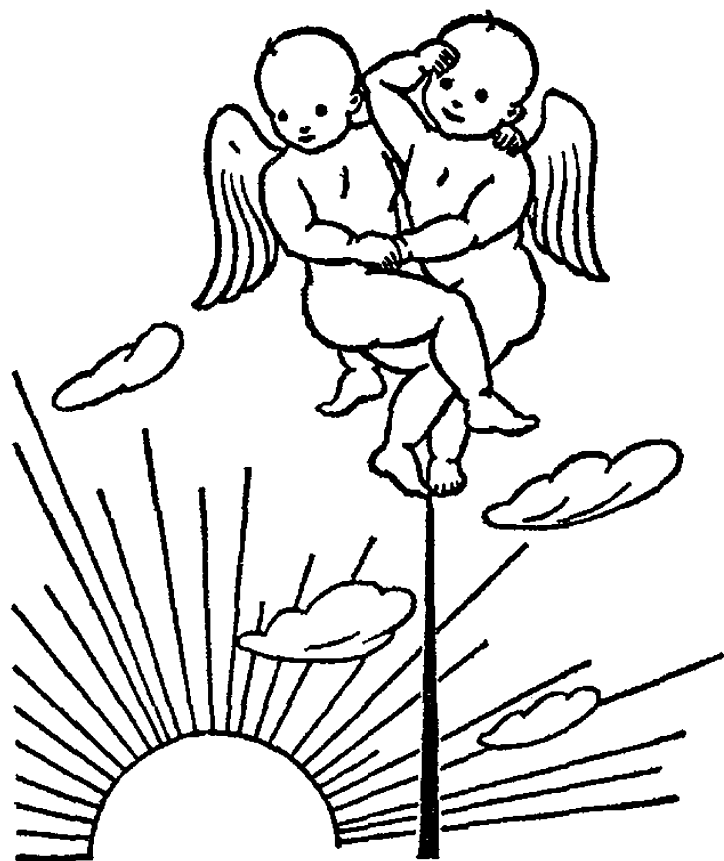


شکل ۲۴

کرد (شکل ۲۴). دایره را هم نمی‌توان به دو قسمت مساوی تقسیم کرد؛ مرکز دایره تنها روی یکی از این قسمتها قرار می‌گیرد و این متناقض با تساوی آنهاست.

بحث درباره بی‌نهایت گاه به گاه شدت می‌گرفت. مثلاً، افلاطون فیلسوف مشهور یونانی با چنان آشتی‌ناپذیری با نظریه اتمی دموکریت در افتاد که همه‌جا نسخه‌های خطی این مؤلف را جستجو می‌کرد و آنها را از بین می‌برد. این روش مبارزه، تا قبل از اختراع چاپ، خیلی مؤثر بود.

روشهایی که متضمن استفاده از مفهوم بی‌نهایت بود، به دانشمندان یونانی اجازه داد که به نتیجه‌های مهمی، بخصوص در هندسه، دست یابند. ولی معماهای زنون، آنها را به احتیاط و ملاحظه‌کاری عادت داد. مثلاً اقلیدس، نظریه معروف خود را درباره نامحدود بودن مجموعه عددهای اول، اینطور بیان می‌کند: «عددهای اول بیشتر از هر مقداری هستند که برای عددهای اول پیشنهاد شود». به این ترتیب، اقلیدس تعداد عددهای اول را بیشتر از هر مقدار پیشنهادی می‌داند، ولی در این باره سکوت می‌کند که آیا این مقدار بی‌نهایت است یا نه! دانشمندان یونان باستان، با چنان دقتی، روشهایی را که مفهوم بی‌نهایت در آن نقشی داشت، پنهان کردند که در سده‌های ۱۶ و ۱۷، ریاضی‌دانهای اروپایی ناچار شدند دوباره این روشها را کشف کنند.



چند فرشته در انتهای سوزن جا گرفته‌اند؟

در سده‌های میانه، مفهوم بی‌نهایت اغلب در بحثهایی از این قبیل پیش می‌آمد که آیا مجموعه فرشته‌هایی که در انتهای يك سوزن جا می‌گیرند، متناهی است یا نامتناهی؟ کاربرد وسیع بی‌نهایت در ریاضیات، از سده هفدهم شروع می‌شود، یعنی زمانی که آنالیز ریاضی به وجود آمد. مفاهیمی از قبیل «مقدار بی‌نهایت بزرگ» و «مقدار بی‌نهایت کوچک» در هر قدم در استدلالهای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ولی در این دوره با مجموعه‌ای که بی‌نهایت عضو داشته باشد، کاری نداشتند، بلکه با مقادیری کار داشتند که ضمن تغییر خود بزرگ و بزرگتر می‌شدند، تا جایی که سرانجام از هر مقدار ثابتی تجاوز می‌کردند. این مقادیر را «بالقوه بی‌نهایت بزرگ» می‌نامیدند، به این مفهوم که می‌توانند به هر اندازه دلخواه بزرگ شوند.

در میانه‌های سده نوزدهم، بررسی مجموعه‌هایی که از بی‌نهایت عضو تشکیل شده بودند، شروع شد و از اینجا به تحلیل مفهوم بی‌نهایت اقدام کردند. آفرینندگان نظریه ریاضی مجموعه‌های نامتناهی برنارد بولتسانو ریاضی‌دان اهل چک (که کار اصلی او سالها پس از مرگ او چاپ شد) و ژرژ کانتور ریاضی‌دان اهل آلمان بودند. این دانشمندان بی‌نظیر موفق شدند نظریه مجموعه‌ها را به یکی از قسمت‌های مهم ریاضیات تبدیل کنند.

موفقیت اساسی بولتسانو و کانتور در مطالعه خواص مجموعه‌های نامتناهی بود؛ خواص مجموعه‌های متناهی تا قبل از آنها هم روشن بود. معلوم شد که خاصیت‌های مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، کاملاً شبیه هم نیستند: بسیاری چیزها که برای مجموعه‌های متناهی ممکن نیست، به سادگی در مجموعه‌های نامتناهی صدق می‌کند. مثلاً فرض کنید در هر اطاق يك مهمانخانه يك مسافر باشد و شما بخواهید در هر اطاق آن باز هم يك اجاره‌نشین ساکن کنید، به نحوی که در وضع جدید هم، در هر اطاق تنها يك نفر زندگی کند. خیال می‌کنید چنین کاری ممکن است؟ البته، اگر تعداد

اطاقهای مهمانخانه محدود باشد، ممکن نیست. ولی اگر این مهمانخانه بی نهایت اطاق داشته باشد، وضع چگونه است؟ ولی چنین مهمانخانه‌هایی را تنها می‌توان در داستانهای ایون تیخی، آشنایی که بین ستارها مسافرت می‌کند، پیدا کرد. از زبان خود او بشنویم.

مهمانخانه عجیب

یا هزار و یکمین مسافرت ایون تیخی

خیلی دیر به‌خانه برگشتم، شب یاد بود، در باشگاه «کهکشان آندرومد»، تا خیلی بعد از نیمه شب طول کشید. کابوس تمام شب، دست از من بر نمی‌داشت. خوابهای آشفته می‌دیدم. مثل این بود که دیوهیولایی می‌خواست مرا ببلعد. به‌نظم آمد که دوباره روی سیاره دودنوتها پرواز می‌کنم و نفهمیدم که چگونه ماشین بزرگی که در آنجا آدمها را به‌شش گوشه تبدیل می‌کرد، فرار کرد... زنگ تلفن، مرا به‌دنیای واقعی برگرداند. پروفیسور تارانتوف، دوست قدیمی و همکار من در مسافرتها فضایی بین ستارگان، پای تلفن بود، که می‌گفت:

«ایون عزیز، يك دستور فوری. منجمین، چیز عجیبی در کیهان کشف کرده‌اند، از يك کهکشان به کهکشان دیگر، خط سیاه اسرارآمیزی کشیده شده است. هیچکس نمی‌داند موضوع از چه قرار است. بهترین رادیو تلسکوپها، تلسکوپهای نوترونی و جاذبه‌ای، نتوانسته‌اند پرده از این راز بردارند. امید همه، تنها به‌توست. فوراً به‌طرف ستارگان آت د ۱۵۸۷، پرواز کن».

فردای آن روز موشك فوتونی خودم را از تعمیرگاه گرفتم، شتاب سنج زمانی و آدمك الكترونی را در آن نصب کردم. آدمك همه زبانه‌های فضایی و همه داستانهای مربوط به ستارگان را می‌دانست (و می‌توانست مرا از تنهایی و دل‌تنگی نجات دهد). من به‌طرف مأموریت خود پرواز

وقتی که آدمک تمام داستانهای خود را تمام کرد و می خواست که آنها را از نو شروع کند (هیچ چیز بدتر از این نیست که آدمک الکترونی تاریخ باستان را برای بار دهم تکرار کند)، هدف مسافرت از دورنمایان شد . مه تیره رنگی که خط اسرارآمیز را گسترده بود در عقب بود و جلو آن به چشم می خورد : «مهمانخانه فضا» .

معلوم شد آوارگان بین ستاره ها ، که من زمانی برای آنها سیاره کوچکی ساخته بودم ، سیاره خود را ، به مناسبت اینکه به تکه های کوچکی تقسیم شده بود ، از دست داده و دوباره بدون پناهگاه باقی مانده اند . اینها برای اینکه بیش از این در کهکشانهای بیگانه سرگردان نمانند ، تصمیم گرفتند ساختمان عظیمی برای همه مسافرین فضایی بسازند . این مهمانخانه تقریباً از همه کهکشانها می گذشت . می گویم «تقریباً همه» زیرا آوارگان ، بعضی از کهکشانهای غیر مسکونی را خراب کرده بودند و از باقیمانده آنها برجهای مهمانخانه را ساخته بودند .

مهمانخانه کاملاً مجهز بود . در هر اتاق آن شیرهایی بود که پلاسمای سرد و گرم در آنها جریان داشت . در صورت تمایل می شد شب به صورت گردهای اتمی درآمد و صبح دوباره به حالت اول برگشت .

مهمتر از همه اینکه مهمانخانه بی نهایت اطاق داشت . آوارگان امیدوار بودند که به این ترتیب ، هیچ مسافری در فضا سرگردان نماند و به جمله ناراحت کننده «اطاق خالی نداریم» بر نخورد .

با همه اینها ، من شانس نیاوردم . وقتی که به اطاق انتظار مهمانخانه رفتم ، نخستین چیزی که به چشم خورد ، این تابلو بود : «اعضای کنگره جانورشناسان فضایی ، برای ثبت نام خود به طبقه ۱۲۷ مراجعه کنند» .

چون جانورشناسان فضایی از همه کهکشانها آمده بودند ، يك

مجموعه نامتناهی را تشکیل می‌دادند ، به همین مناسبت همه اطاقها به وسیله نمایندگان کنگره اشغال شده بود . برای من جایی پیدا نمی‌شد . مسئول ذخیره جا در مهمانخانه واقعاً تلاش کرد که مرا در کنار یکی از جانورشناسان جابدهد. ولی وقتی برای من روشن شد که یکی از همسایه‌هایی



ساختمان مهمانخانه فضا

که برای من منظور شده بود با گاز مسموم کننده و بدبوی فلوئور نفس می کشد ، و دیگری در درجه حرارت ۸۶۰ درجه زندگی می کند، با کمال ادب از همجواری این همسایه های «مطبوع» عذر خواستم .

خوشبختانه ، مدیر مهمانخانه از آوارگان بود و خدمتهایی که من زمانی به گروه او انجام داده بودم ، به خاطر داشت . او سعی داشت به ترتیبی شده مرا در مهمانخانه جا بدهد، آخر هنگام شب در مسافرت های فضایی احتمال ورم ریه ها زیاد است . او بعد از کمی فکر ، به مسئول ذخیره جا رو کرد و گفت :

- او را به اطاق شماره ۱ بفرست .

مسئول ذخیره جا با تعجب پرسید :

- پس کسی را که در این اطاق ساکن است کجا بفرستم ؟

- او را به اطاق شماره ۲ بفرست ، ساکن شماره ۲ را به شماره ۳

و ساکن شماره ۳ را به شماره ۴ و غیره .

اینجا بود که من به خاصیت غیرعادی مهمانخانه پی بردم . اگر تعداد اطاقهای مهمانخانه محدود بود ، این راه حل باعث می شد که مسافر آخرین اطاق در فضای بین ستاره ها سرگردان بماند . ولی چون تعداد اطاقهای مهمانخانه ، بی نهایت بود ، هیچکس بدون جا باقی نماند و من جای هیچ مسافر دیگری را نگرفتم .

و من هیچ تعجب نکردم ، وقتی که صبح فردای آنروز به من پیشنهاد شد که به اطاق شماره ۱۰۰۰۰۰۰ منتقل شوم . مطلب این بود که نماینده های کهکشان و . س . ک ۳۴۷۲ در کنگره جانورشناسان فضایی دیر رسیده بودند و می بایستی به تعداد آنها که ۹۹۹۹۹۹ نفر بودند، اطاق خالی تهیه کرد . ولی وقتی که روز سوم اقامت خودم در مهمانخانه به مسئول ذخیره جا مراجعه کردم ، چشمهایم سیاهی رفت . در مقابل پنجره صفی به نوبت ایستاده بود که انتهای آن جای دوری نزدیکیهای ابرهای

ماژلان گم می‌شد. این صداها پیایی به گوش می‌رسید:

«دو تمبر کهکشانی آندوهد را با تمبر سیروس عوض می‌کنم!»

«چه کسی تمبر سال ۵۷ سده فضایی را دارد؟»

با حیرت به طرف مسئول رفتم و پرسیدم:

— اینها کیستند؟

— کنگره تمبرشناسان بین کهکشانیها.

— و عده آنها زیاد است؟

— عده آنها بی‌نهایت است: از هر کهکشانی که نماینده آمده

است.

— ولی آنها را چگونه می‌دهید، آخر جانورشناسان فضایی فردا

خارج خواهند شد.

— نمی‌دانم. پنج دقیقه‌ای است که در باره همین مطلب با مدیر

صحبت می‌کنم.

ولی مسأله کاملاً پیچیده بود و این پنج دقیقه (همانطور که در

زمین هم اغلب پیش می‌آید) درست یک ساعت طول کشید. بالاخره مسئول

ذخیره جا از مدیر مهمانخانه جدا شد و شروع به جا دادن مسافران کرد.

ابتدا دستور داد مسافر اطاق شماره ۱ به شماره ۲ برود. این دستور

برای من عجیب بود، زیرا با تجربه‌ای که داشتم می‌دانستم که به این

ترتیب تنها یک اطاق خالی می‌شود، درحالی که تعداد تمبرشناسان بی‌نهایت

بود. ولی مسئول به دستورات خود ادامه داد:

— مسافر اطاق شماره ۲ به شماره ۴، مسافر شماره ۳ به شماره

۶ و بطور کلی مسافر اطاق شماره n به اطاق شماره $n+2$ منتقل شود.

حالا دیگر نقشه او معلوم بود: به این ترتیب، او بی‌نهایت اطاق

با شماره‌های فرد را خالی کرده بود و می‌توانست تمبرشناسان را در آنها

جا دهد. در نتیجه اطاقهای با شماره زوج در اختیار جانورشناسان و

اطاقهای با شماره فرد در اختیار تمبرشناسان قرار گرفت! و اما من: در سه روزی که در آنجا بودم چنان آشنایی و دوستی با جانورشناسان پیدا کرده بودم، که آنها مرا به عنوان رئیس افتخاری کنگره خود انتخاب کرده بودند؛ من هم همراه جانورشناسان اطاق خود را ترك كردم و از شماره ۱۰۰۰۰۰۰ به اطاق شماره ۲۰۰۰۰۰۰۰ رفتم. تمبرشناس آشنای من که در نوبت ۵۷۴ بود، اطاق شماره ۱۱۴۷ را اشغال كرد. بطور کلی تمبرشناسی که در ردیف n ام بود، در اطاق شماره $n-1$ ساکن شد. روز بعد وضع اطاقها بهتر شد؛ کنگره جانورشناسان تمام شده بود و آنها به خانه‌های خود باز گشتند. من هم به محل اقامت مدیر مهمانخانه انتقال پیدا کردم که در آنجا يك اطاق خالی شده بود. ولی این موقعیت، که خیلی خوب بود، همیشه مورد موافقت مسئول تهیه جا قرار نمی گرفت. میزبان مهمان‌نواز من دل‌تنگ بود. از او پرسیدم:

- چه پیش آمده است؟

- نیمی از شماره‌ها خالی است، نقشه مالی اجرا نمی‌شود.

در واقع من اصلاً نمی‌فهمیدم که صحبت بر سر کدام نقشه مالی است، آخر پول از يك مجموعه نامحدود وصول می‌شد، ولی با وجود این توصیه کردم:

- مسافران را فشرده‌تر کنید، آنها را طوری جابجا کنید که همه

اطاقها اشغال شود.

انجام این کار خیلی ساده بود. تمبرشناسان در اطاقهای با شماره فرد، ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و غیره بودند. ساکن اطاق شماره ۱ به جای خود باقی می‌ماند، از شماره ۳ به شماره ۲، از شماره ۵ به شماره ۳، از شماره ۷ به شماره ۴ و غیره منتقل می‌شد. در نتیجه، بدون اینکه مسافر جدیدی وارد شود، تمام اطاقها پر می‌شد.

ولی نگرانیهای مدیر در اینجا تمام نمی‌شد. معلوم شد که آوارگان

به ساختن همین مهمانخانه فضا، اکتفا نکرده اند. معمارهای ناآرام و خستگی ناپذیر، مجموعه نامحدودی مهمانخانه ساخته بودند که در هر کدام از آنها هم بی نهایت اطاق وجود داشت. برای این منظور، آنها بسیاری از کهکشانها را خراب کرده بودند، این عمل تعادل بین کهکشانها را بهم زده بود که می توانست موجب عواقب غم انگیزی بشود، به همین مناسبت به آنها پیشنهاد شده بود که همه مهمانخانه ها، بجز مهمانخانه فضا را ببندند و مصالح آنها را به جای اصلی برگردانند. ولی اجرای این دستور مشکل بود، زیرا همه مهمانخانه ها (و از آنجمله مهمانخانه ما)، پراز مسافر بودند. می بایستی ساکنین بی نهایت مهمانخانه را، که هر کدام از آنها بی نهایت مستأجر داشت، به يك مهمانخانه منتقل کرد، که تازه خود این مهمانخانه هم پر بود. مدیر با صدای بلند گفت:

- برای من کافی است! من ابتدا در يك مهمانخانه پر يك نفر جا دادم، سپس ۹۹۹۹۹۹ مسافر جدید را، سپس بی نهایت مراجعه کننده تازه را پذیرفتم، حالا از من می خواهند که مجموعه نامتناهی که شامل مجموعه های نامتناهی مستأجر است در این مهمانخانه جا بدهم. نه! مهمانخانه که کش نمی آید، من چطور جا تهیه کنم؟

ولی دستور باید اجرا شود و بعد از پنج روز باید همه چیز آماده پذیرفتن مهمانهای جدید باشد. هیچکس در این روزها در مهمانخانه کار نمی کرد، همه فکر می کردند که چگونه مسأله را حل کنند. حل مسأله به مسابقه گذاشته شد و اعلام شد که برنده آن به جای دریافت جایزه، به یکی از کهکشانها مسافرت مجانی خواهد کرد. ولی همه راه حلهای پیشنهادی به مناسبت ناتوانی آنها برگردانده شد. مثلاً آشپز جوانی پیشنهاد کرده بود که ساکنین موجود مهمانخانه ما به اطاقهای شماره ۱، ۱۰۰۱، ۲۰۰۱ و غیره منتقل شوند. سپس ساکنین مهمانخانه دوم را در اطاقهای شماره ۲، ۱۰۰۲، ۲۰۰۲ و غیره و ساکنین مهمانخانه سوم را در اطاقهای

شماره ۳، ۱۰۰۳، ۲۰۰۳ و غیره جا دهند و همینطور برای مهمانخانه‌های بعدی. این طرح به این مناسبت برگردانده شد که تنها برای مسافران ۱۰۰۰ مهمانخانه جا تهیه می‌کرد و ساکنین مهمانخانه ۱۰۰۱ بدون جا می‌ماندند.

به این مناسبت، این موضوع به خاطر مآدمدگی و وقتی که سناتورهای متعلق رومی به امپراطور (قیصر) پیشنهاد کردند که ماه سپتامبر را به افتخار او «تیسر» بنامند (ماه‌های قبلی هم به نام امپراطورها، ژول و اگوست نامیده می‌شد)، امپراطور با طعنه پرسید: «در این صورت به امپراطور سیزدهم چه پیشنهادی خواهید کرد؟»

حسابدار مهمانخانه راه حلی پیشنهاد کرد که خیلی بد نبود. او توصیه کرد که از خاصیت تصاعد هندسی استفاده شود و ساکنین مهمانخانه‌ها را به این ترتیب جا بدهند: ساکنین مهمانخانه اول را در شماره‌های ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ و غیره (این عددها تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ می‌دهند)، ساکنین مهمانخانه دوم در شماره‌های ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و غیره (و اینها جمله‌های یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۳ هستند). به همین ترتیب برای ساکنین سایر مهمانخانه‌ها. مدیر از او پرسید:

- پس برای ساکنین مهمانخانه سوم باید از تصاعد هندسی با قدر نسبت ۴ استفاده کرد؟

حسابدار جواب داد:

- البته.

- در این صورت به اشکال برمی‌خوریم، در اطاق شماره ۴، مسافری از مهمانخانه اول را جا داده‌ایم و حالا باید در همانجا، مسافری از مهمانخانه سوم را جا بدهیم.

حالا دیگر نوبت من بود که ثابت کنم بی‌جهت پنج سال وقت خود را

در آکادمی ستاره به خاطر تحصیل ریاضیات ، صرف نکرده ام .

- از عددهای اول استفاده کنید ! ساکنین مهمانخانه اول را در شماره های ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ... ، ساکنین مهمانخانه دوم را در شماره های ۳ ، ۹ ، ۲۷ ، ۸۱ ، ... ، ساکنین مهمانخانه سوم را در شماره های ۵ ، ۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ، ... ، ساکنین مهمانخانه چهارم را در شماره های ۷ ، ۴۹ ، ۳۴۳ ، ... جا بدهید .

مدیر پرسید :

- آیا در این صورت دیگر در هیچ اتاقی دوسافر نخواهد بود ؟
- نه ! زیرا اگر دو عدد اول را در نظر بگیریم ، هیچ توانی از آنها (به شرطی که نماعددی طبیعی باشد) با هم مساوی نخواهد بود . اگر p و q دو عدد اول و ضمناً $p \neq q$ ، و m و n دو عدد طبیعی باشد ، داریم $p^m \neq q^n$.

مدیر استدلال مرا تأیید کرد و همان وقت روش کاملتری هم ارائه داد ، که در آن فقط از دو عدد اول ۲ و ۳ استفاده می شد . او پیشنهاد کرد که ساکنان اتاق شماره m ام از مهمانخانه n ام را به اتاق شماره $3^m \times 2^n$ از مهمانخانه خودمان بفرستیم ، زیرا اگر $m \neq p$ و $n \neq q$ باشد ، داریم : $3^m \times 2^n \neq 3^p \times 2^q$. به این ترتیب در هیچ اتاقی دوفرنخواهد بود . این پیشنهاد همه را به وجد آورد . مسأله ای که به نظر حل نشدنی می رسید ، حل شده بود . ولی جایزه را نه من بردم و نه مدیر ، زیرا در راه حلهای ما تعداد زیادی از اتاقها خالی می ماند (در پیشنهاد من شماره هایی از نوع ۶ ، ۱۰ ، ۱۲ و بطور کلی هر شماره ای که توانی از يك عدد اول نبود ؛ و در پیشنهاد مدیر ، شماره هایی که به صورت $3^m \times 2^n$ نبودند) . بهترین پیشنهاد را یکی از تعبیرشناسان داد که رئیس آکادمی ریاضی کهکشان قو بود .

او توصیه کرد که ابتدا جدولی ترتیب دهیم به نحوی که در سطرهای

این جدول ، شمارهٔ مهمانخانه‌ها و درستونهای آن ، شمارهٔ اطاقها قرار داشته باشد . مثلاً در برخورد سطر چهارم و ستون ششم نوشته شود : اطاق ششم از مهمانخانهٔ چهارم . این جدول چنین است (البته این ، گوشهٔ چپ و بالای جدول است ، زیرا برای نوشتن تمام جدول به‌بی‌نهایت سطر و ستون نیاز داریم) :

$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	...	$(1, n)$	...
$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(2, 4)$	$(2, 5)$	...	$(2, n)$	...
$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$	$(3, 4)$	$(3, 5)$	...	$(3, n)$	...
$(4, 1)$	$(4, 2)$	$(4, 3)$	$(4, 4)$	$(4, 5)$	...	$(4, n)$	...
$(5, 1)$	$(5, 2)$	$(5, 3)$	$(5, 4)$	$(5, 5)$	...	$(5, n)$	...
.	.	.	.	.	.	.	.
$(m, 1)$	$(m, 2)$	$(m, 3)$	$(m, 4)$	$(m, 5)$	...	(m, n)	...
.	.	.	.	.	.	.	.

تمبرشناس ریاضی‌دان گفت :

- و حالا آنها را به ترتیب مربعی در مهمانخانهٔ خودتان جا دهید .

- چطور ؟ مدیر روش کار را نفهمیده بود .

- $(1, 1)$ را در شمارهٔ ۱ جا دهید ، یعنی از اطاق اول مهمانخانهٔ

اول به شمارهٔ ۱ ؛ از $(1, 2)$ به شمارهٔ ۲ ، یعنی از اطاق دوم مهمانخانهٔ

اول به شمارهٔ ۲ ؛ از $(2, 2)$ به شمارهٔ ۳ ، یعنی از اطاق دوم مهمانخانهٔ

دوم به شمارهٔ ۳ ؛ از $(2, 1)$ به شمارهٔ ۴ ، یعنی از اطاق اول مهمانخانهٔ

دوم به شمارهٔ ۴ . به این ترتیب ساکنین مربع به ضلع ۲ را که در گوشهٔ

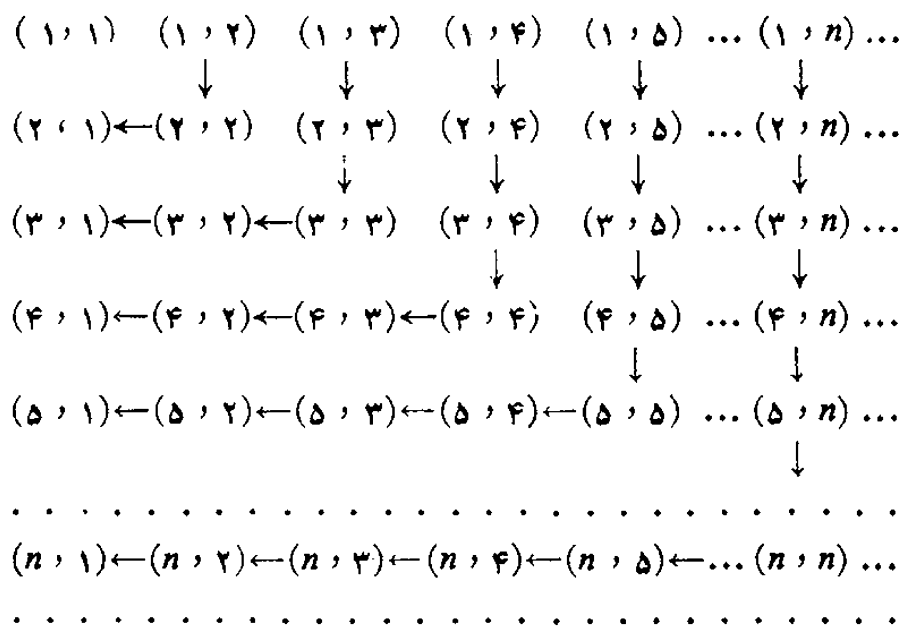
چپ و بالای جدول قرار گرفته است ، جا داده‌اید . حالا مستأجر $(1, 3)$

را به شمارهٔ ۵ منتقل کنید ؛ از $(2, 3)$ به شمارهٔ ۶ ؛ از $(3, 3)$ به

شمارهٔ ۷ ؛ از $(3, 2)$ به شمارهٔ ۸ ؛ از $(3, 1)$ به شمارهٔ ۹ . به این

ترتیب مربع به ضلع ۳ هم تمام می‌شود .

ریاضی‌دان تمبرشناس کاغذی برداشت و روی آن طرح زیر را رسم کرد :



مدیر که هنوز تردید داشت پرسید :

- آیا به این ترتیب برای همه جا خواهد بود ؟

- البته ! در این طرح، ما در n^2 شماره مهمانخانه خودمان، ساکنین n اتاق اول n مهمانخانه اول را جا داده‌ایم، به همین ترتیب دیر یا زود نوبت دیگران هم فرا می‌رسد. مثلاً اگر کسی در اتاق شماره ۱۳۶ از مهمانخانه شماره ۲۱۷ باشد، اتاق خودش را در قدم ۲۱۷ ام بدست می‌آورد. شماره اتاق او را به سادگی می‌توان حساب کرد. این شماره برابر است با $1 + 136 - 217$. بطور کلی، اگر کسی در اتاق شماره n از مهمانخانه m باشد، در حالت $n \geq m$ به اتاق شماره $m + (n - m)$ و در حالت $n < m$ به اتاق شماره $m - n + 1$ منتقل می‌شود.

این طرح پیشنهادی بسیار جالب بود، همه ساکنین همه مهمانخانه‌ها، در مهمانخانه ما جا می‌گرفتند و ضمناً هیچکدام از اتاقهای «مهمانخانه»

فضاء» هم خالی نمی ماند. ریاضی دان تمبرشناس جایزه مسافرت به کهکشان
ل . ت . ر - ۲۸۷ را برده بود .

مدیر به افتخار حل این مشکل، جایزه ای ترتیب داد که همه ساکنین
مهمانخانه از آن برخوردار شدند . ترتیب این جایزه هم خالی از اشکال
نبود . ساکنین اطاقهای شماره های زوج نیم ساعت تأخیر کردند و وقتی
که به سالن آمدند ، همه صندلیها اشغال بود ؛ میزبان مهمان نواز برای
همه آنها جا تهیه کرد، منتها کمی طول کشید تا هر کسی به صندلی جدیدش
منتقل شود (البته بدون اینکه حتی يك صندلی جدید به سالن آورده
شود) . سپس به هر يك از مهمانها دو پرس بستنی داده شد ، در حالی که
برای هر مهمان تنها يك پرس درست شده بود . امیدوارم خواننده بفهمد
که این وضع چگونه پیش آمده است .

من بعد از آنکه بستنیها را خوردم، درموشك فوتونی خود نشستم
و به زمین باز گشتم تا همه آنچه را که در فضا دیده بودم، برای ساکنین
زمین باز گو کنم . علاوه بر آن می خواستم با ریاضی دانهای نامی زمین و
دوست خودم پروفسور تارانتوف در باره خاصیت های يك مجموعه نامتناهی
بحث کنم .

از نویسنده

تا اینجا به داستان قهرمان خود گوش کردیم ، ولی بعضی از
حکایت های او در آدم ایجاد شك می کند . بنا بر نظریه نسبیت نمی توان
علامتها را با سرعتی بیش از ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه فرستاد . بنابراین
حتی برای اینکه نخستین دستور مسئول مهمانخانه به اطاقها برسد ، به
بی نهایت وقت نیاز داریم . ولی از ایون تیخی بیش از این نباید انتظار
داشت ، تمام مسافرت او همراه با نشدنیهاست .

این فصل کتاب را به مجموعه های نامتناهی اختصاص داده ایم ؛ ولی

برای داشتن نمونه‌هایی از این مجموعه‌ها، لازم نیست به فضای بین ستارگان پرواز کنیم، بلکه از پاره خط $[a, 1]$ یا مربع به ضلع ۱ گفتگو خواهیم کرد، که در آنجاها هم به اندازه کافی به پیش آمده‌ای غیر عادی برخورد خواهیم خورد.

مجموعه‌ها را چگونه مقایسه می‌کنند

در فصل اول از خاصیت‌هایی نام بردیم که هم برای مجموعه‌های متناهی و هم برای مجموعه‌های نامتناهی درست است. حالا می‌خواهیم به خاصیت‌هایی بپردازیم که تنها مربوط به مجموعه‌های نامتناهی است. از قصه ایون تیخی معلوم می‌شود که این خاصیتها، بکلی با آنچه که درباره مجموعه‌های متناهی می‌دانیم، متفاوت است: چیزهایی که برای مجموعه‌های متناهی نشدنی است، برای مجموعه‌های نامتناهی شدنی به نظر می‌رسد.

نخستین موضوعی که در اینجا به آن می‌پردازیم، موضوع مقایسه مجموعه‌های بی‌نهایت با یکدیگر است. برای مجموعه‌های متناهی با طبیعت‌های مختلف، همیشه می‌توان گفت که کدامیک شامل عضو بیشتری است و کدامیک شامل عضو کمتر. ولی مقایسه مجموعه‌های نامتناهی خیلی پیچیده‌تر است. مثلاً پاسخ به این پرسش را به سادگی نمی‌توان داد که کدام بیشترند: عددهای طبیعی یا عددهای گویا؛ عددهای گویا یا عددهای حقیقی؟ کجا نقطه‌های بیشتری است؛ روی یک پاره خط یا روی تمام خط؛ روی یک خط یا داخل یک مربع؟

اگر بطور سطحی قضاوت کنیم، به نظر می‌رسد که پاسخ به این پرسشها، خیلی هم مشکل نیست. مگر نه این است که مجموعه عددهای طبیعی قسمتی از عددهای گویاست، مگر پاره خط جزئی از تمام خط نیست؟ آیا از اینجا روشن نمی‌شود که عددهای طبیعی کمتر از عددهای

گویا یا نقطه‌های روی يك پاره خط کمتر از نقطه‌های روی تمام خط است؟ خواهیم دید که این نتیجه‌گیری به هیچوجه روشن نیست. ما هیچ کجا ثابت نکرده‌ایم که قانونهای مجموعه‌های متناهی برای مجموعه‌های نامتناهی هم درست است، مثلاً معلوم نیست که قانون «جزء کمتر از کل است» در مورد مجموعه‌های نامتناهی هم درست باشد.

مهم‌تر از همه این است که آزمایش مقایسه مجموعه‌های نامتناهی، از این طریق که ببینیم کداميك جزئی از دیگری است، اغلب مواجه با عدم موفقیت می‌شود. مثلاً کجا نقطه‌های بیشتری وجود دارد، در داخل مربع یا روی يك خط نامحدود؟ آخر نه مربع را می‌توان روی خط راست قرارداد و نه خط راست را می‌توان خم کرد و به داخل مربع برآورد. و چقدر مجموعه‌های نامتناهی وجود دارد که یکی قسمتی از دیگری نمی‌تواند باشد! مجموعه مربعهای واقع بر صفحه و مجموعه دایره‌های واقع بر همین صفحه، حتی يك عضو مشترك هم ندارند. چطور باید آنها را مقایسه کرد؟ چگونه می‌توان دانست که در جهان کدام بیشترند: اتمهای ازن یا اتمهای اکسیژن؟

به این ترتیب مشکل کار روشن است. ابتدا این مطلب را روشن می‌کنیم که در چه حالتی می‌توان گفت در يك مجموعه همانقدر عضو وجود دارد که در مجموعه دیگر، به عبارت دیگر روشن می‌کنیم که در چه حالتی، تعداد عضوهای دو مجموعه نامتناهی «برابر» است.

در مجلس رقص

مسأله مقایسه مجموعه‌های متناهی به سادگی حل می‌شود. برای اینکه بدانیم آیا تعداد عضوهای دو مجموعه متناهی، یکی است یا نه، کافی است که آنها را بشماریم. اگر در هر دو مورد يك عدد بدست آید، به این معنا است که در دو مجموعه به يك تعداد عضو وجود دارد. ولی در مورد

مجموعه‌های نامتناهی، این روش به درد نمی‌خورد، زیرا برای شمردن عضوهای يك مجموعه نامتناهی باید تمامی عمر خود را وقف کنیم و تازه نتوانیم به انتهای کاربرسیم.

در مورد مجموعه‌های متناهی هم، روش شمردن همیشه بهترین روش نیست. مثلاً يك صحنه رقص را در نظر بگیریم. چطور می‌شود فهمید که آیا تعداد پسرها با تعداد دخترها برابر است یا نه؟ البته می‌توان خواهش کرد که پسرها يك طرف و دخترها طرف دیگر بایستند و تعداد اینها و آنها را بشماریم. با این روش اولاً اطلاعات غیر لازمی بدست می‌آوریم، ما نیازی به دانستن تعداد پسرها و دخترها نداریم، بلکه تنها می‌خواستیم بدانیم که آیا تعداد آنها برابر است یا نه. ثانیاً برای اینکه جوانها را به صحنه رقص ببریم باید ابتدا آنها را معطل کنیم تا بعد از شمردن آنها، اجازه ورود به صحنه رقص را داشته باشند.

پس چه باید کرد؟ از ارکستر می‌خواهیم موسیقی را شروع کند که همه بتوانند با آن برقصند. در این صورت پسرها، دخترها را به رقص دعوت می‌کنیم و... مسأله ما هم حل می‌شود. اگر همه پسرها و همه دخترها به رقص مشغول باشند، یعنی اگر همه جوانها دو به دو با هم برقصند، روشن می‌شود که تعداد دخترها و پسرها در صحنه رقص مساوی است.

درست با همین روش می‌توان فهمید که تعداد تماشاچیها در تئاتر، با تعداد صندلیها برابر است. اگر در موقع نمایش، همه جاها اشغال شده باشد، ضمناً هیچکدام از تماشاچیها در راهرو سرپا نباشند و روی هر صندلی هم تنها يك نفر نشسته باشد، می‌توان مطمئن شد که تعداد تماشاچیها با تعداد صندلیها برابر است.

وقتی که در يك روز بارانی، کسانی از خیابان می‌گذرند، تعداد آدمها برابر است با تعداد بارانیهای آنها؛ هر آدمی تنها يك بارانی دارد و ضمناً کسی در چنین روزی، بدون بارانی بیرون نمی‌آید.

با روشی آشنا شدیم که به کمک آن بتوانیم از تساوی عضوهای دو مجموعه متناهی، بدون شمردن عضوهای آنها، مطلع شویم. همین روش را برای مجموعه‌های نامتناهی هم می‌توان بکار برد. منتهی^۱ در اینجا لزومی ندارد که از ارکستر یاری بخواهیم، بلکه کافی است عضوهای دو مجموعه‌ای را که باید با هم مقایسه کنیم، به صورت «زوجهای رقص» درآوریم.

فرض کنید دو مجموعه A و B به ما داده باشند. گویند بین آنها تناظر يك به يك وجود دارد، وقتی که بتوان عضوهای این دو مجموعه را به صورت (a, b) به نحوی تنظیم کرد که:

(۱) عضو a متعلق به مجموعه A ، و عضو b متعلق به مجموعه B باشد؛

(۲) هر عضو از این دو مجموعه، در یکی و تنها یکی از این زوجها قرار گرفته باشد.

مثلاً اگر مجموعه A عبارت از پسرهایی باشد که در رقص شرکت دارند، و مجموعه B از دخترهای شرکت کننده در این رقص تشکیل شده باشد، زوجهای (a, b) عبارت است از پسرها و دخترهایی که با هم رقص می‌کنند. اگر A ، مجموعه تماشاچیان و B ، مجموعه صندلیهای تئاتر باشد، زوج (a, b) یعنی تماشاچی و صندلی که روی آن نشسته است. بالاخره اگر A مجموعه آدمهای خیابان، و B مجموعه بارانیهای آنها باشد، زوج (a, b) عبارت است از يك آدم و بارانی او.

روشن است که هر تناظر، يك به يك نیست. اگر A مجموعه همه درختهای روی زمین، و B مجموعه میوه‌های روی این درختها باشد، بین این مجموعه‌ها می‌توان تناظری برقرار کرد: هر میوه متناظر است با درختی که روی آن به وجود آمده است. ولی این، تناظر يك به يك

نیست : روی بسیاری از درختها بیش از يك میوه وجود دارد، و بسیاری دیگر هنوز میوه‌ای ندارند. بنابراین بعضی از عضوهای a (درختها) در بیش از يك زوج شرکت دارند ، و بعضی دیگر از عضوهای a حتی در يك زوج هم نیستند .

وجود تناظر يك به يك برای مجموعه‌های متناهی ، به معنای آن است که تعداد عضوهای این مجموعه‌ها با هم برابر است. نقطه تحول اساسی در نظریه مجموعه‌ها مربوط به زمانی است که کانتود تصمیم گرفت فکر تناظر يك به يك را برای مقایسه مجموعه‌های نامتناهی هم بکاربرد. بنابراین کانتود ، برای دو مجموعه A و B (که ممکن است نامتناهی هم باشند) وقتی تعداد اعضوها برابر است که بتوان بین این دو مجموعه ، تناظر يك به يك برقرار کرد .

معمولاً ریاضی دانها نمی گویند که «مجموعه‌های A و B به يك تعداد عضو دارند»، بلکه می گویند : « A و B هم قوت‌اند» یا «مجموعه‌های A و B هم‌اند» ؛ گرچه ، اگر در این حالت بگوییم « دو مجموعه هم‌عدند» غلط نیست .

به این ترتیب کلمه «قوت» برای مجموعه‌های نامتناهی ، همان معنی «تعداد اعضوها» برای مجموعه‌های متناهی را دارد.

ب. بولتسانو دانشمند اهل چک هم قبل از کانتود به مفهوم تناظر يك به يك توجه کرده بود. منتهی او در مقابل دشواریهایی که ناشی از این مفهوم بود، عقب‌نشینی کرد. ما هم خواهیم دید که قبول تناظر يك به يك برای مقایسه مجموعه‌های نامتناهی ، منجر به برخوردهایی با بسیاری از حکمهای مورد قبول می‌شود.

آیا جزء مساوی کل است؟

جدی‌ترین برخورد با موقعیت «جزء کمتر از کل است» ، به وجود

می‌آید که در سپیده دم تکامل ریاضیات مورد قبول قرار گرفته است. این حکم برای مجموعه‌های متناهی، بدون هیچ شرطی، درست است، ولی دربارهٔ مجموعه‌های نامتناهی قدرت خود را از دست می‌دهد. به خاطر بیاوریم که مدیر مهمانخانهٔ عجیب فضا، چگونه توانست ساکنین تمام اتاقها را به اتاقهای شمارهٔ زوج منتقل کند. برای این منظور، او دستور داد که ساکنان اتاق شمارهٔ n به اتاق شمارهٔ $2n$ منتقل شود. به زبان دیگر، جابجایی بنابر طرح زیر انجام گرفت:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots & \end{array}$$

و این طرح، بین مجموعهٔ عددهای طبیعی

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

و جزئی از آن، یعنی مجموعهٔ عددهای زوج

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

تناظر يك به يك برقرار می‌کند. و ما قرار بر این گذاشتیم که اگر دو مجموعه در تناظر يك به يك باشند، از لحاظ تعداد اعضاها برابرند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی، برابر است با تعداد عضوهای مجموعهٔ عددهای زوج.

درست به همین ترتیب می‌توان بین مجموعهٔ عددهای طبیعی و مجموعهٔ عددهای به صورت

$$10, 100, 1000, 10000, \dots$$

تناظر يك به يك برقرار کرد. برای این منظور باید هر عدد طبیعی n را با عدد 10^n متناظر کرد:

$$n \rightarrow 10^n$$

باز هم به همین ترتیب می‌توان بین مجموعهٔ عددهای طبیعی و

مجموعه عددهای طبیعی مجذور کامل، تناظر يك به يك برقرار کرد :

$$n \rightarrow n^2$$

و یا بین مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه عددهای طبیعی مکعب کامل :

$$n \rightarrow n^3$$

و غیره .

بطور کلی همیشه می توان بین مجموعه همه عددهای طبیعی و هر زیر مجموعه نامتناهی از آن، تناظر يك به يك برقرار کرد . برای این منظور کافی است عددهای این زیر مجموعه را به ترتیب شماره گذاری کنیم .

* بی جهت نیست که می گویند هیچ چیز در زیر آسمان تازه نیست . گالیله هم در ابتدای سده هفدهم، درباره تناقضات بی نهایت فکر کرد و امکان برقرار کردن تناظر يك به يك بین مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه مجذورهای آنها را کشف کرد . گالیله در کتاب خودش به نام «بحثها و اثباتهای ریاضی مربوط به مکانیک...» (سال ۱۶۳۸) ، گفتگویی ترتیب داده است که در آن سالویاتی (که فکر خود گالیله را بیان می کند) : می گوید :

«آنچه گفتیم از جمله مشکلات است و ناشی از آن است که ما با عقل محدود خود درباره بی نهایت قضاوت می کنیم و خاصیت هایی را که برای يك چیز محدود و متناهی درست است به بی نهایت هم نسبت می دهیم . در حالی که این روش درست نیست ؛ زیرا خاصیت هایی مثل بزرگتر ، کوچکتر و تساوی را برای بی نهایت نه می توان بکاربرد و نه می توان گفت که يك بی نهایت بزرگتر یا کوچکتر از بی نهایت دیگر و یا مساوی آن است .»

سالویاتی در تأیید فکرش متذکر می شود که از يك طرف «مجدورها همانقدر وجود دارند که ریشه های آنها، زیرا هر مجذوری ریشه ای دارد

وهر ریشه‌ای مجذوری؛ هیچ مجذوری دو ریشه ندارد و هیچ ریشه‌ای بیش از يك مجذور ندارد...^۱ ضمناً تعداد ریشه‌ها برابر است با مقدار همه عددها بطور کلی، از آنجا که هیچ عددی وجود ندارد که مجذوری نداشته باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که تعداد مجذور^۲ برابر است با مقدار کل همه عددها...

از طرف دیگر، سالویاتی متذکر می‌شود که «مقدار همه عددها که شامل مجذورها و غیر مجذورهاست، از تنها يك قسمت آن، یعنی مجذورها، بیشتر است»، ضمناً «هر چه به عددهای بزرگتر برسیم، تعداد مجذورها مرتباً و به نسبت زیادی کمتر می‌شود». سالویاتی، به عنوان راه حلی برای این تناقض، چنین پیشنهاد می‌کند:

«من امکان راه حل دیگری جز این نمی‌بینم که قبول کنیم مقدار عددها بطور کلی بی‌نهایت است، تعداد مجذورها بی‌نهایت است و تعداد جذرها هم بی‌نهایت است. نمی‌توان گفت که تعداد مجذورها کمتر از مقدار همه عددها و یا آخری بیشتر از اولی است: خاصیت‌های تساوی و همچنین بزرگتر و کوچکتر، وقتی که صحبت از بی‌نهایت است، موردی پیدا نمی‌کند، این مفهوماً تنها برای مقادیر محدود بکار می‌روند».

می‌بینیم که گالیله، فکر تناظر يك به يك را تعقیب می‌کند و متوجه می‌شود که چنین تناظری را می‌توان بین مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه مجذورها برقرار کرد، و بنابراین تعداد عضوهای این دو مجموعه را می‌توان مساوی به حساب آورد. این مطلب را هم می‌فهمد که برای مجموعه‌های نامتناهی، ممکن است زیر مجموعه، مساوی کل مجموعه باشد. ولی گالیله از اینجا نتیجه نادرستی می‌گیرد: همه بی‌نهایتها مساوی‌اند؛ او تنها با زیر مجموعه‌های طبیعی سروکار دارد و آنها را هم می‌توان شماره گذاری کرد.

(۱) در اینجا تنها عددهای طبیعی مورد نظر است.

گاليله نتوانست پيش خود تصور كند كه مجموعه نقطه‌هاى پاره‌خط را نمى‌توان شماره‌گذارى كرد (ما بزودى در اين باره صحبت خواهيم كرد) . او شبیه پيروان فلسفه اتمى دنياى باستان ، گمان مى‌كند، كه پاره‌خط از مجموعه نامتناهى اتمها تشكيل شده است.*

مجموعه‌هاى شمارا

هر مجموعه‌اى كه با مجموعه عددهاى طبيعى هم‌عدد باشد، مجموعه شمارا ناميده مى‌شود . به زبان ديگر ، مجموعه‌اى را شمارا گوييم كه نامتناهى باشد ، ولى بتوان عضوهاى آنرا به ردیف عددهاى طبيعى شماره‌گذارى كرد. مثلاً "مجموعه عددهاى زوج، مجموعه عددهاى فرد، مجموعه عددهاى اول، و بطور كلى هر زير مجموعه نامتناهى از مجموعه عددهاى طبيعى ، مجموعه‌هاى شمارا هستند .

گاهى براى اينكه شمارا بودن يك مجموعه را ثابت كنيم، لازم مى‌شود دست به ابتكارهاى بزنيم. مثلاً "مجموعه همه عددهاى درست را انتخاب مى‌كنيم (هم مثبت و هم منفي):

$$\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

اگر شماره‌گذارى اين مجموعه را از جايى شروع كنيم، در اين صورت اين شماره‌گذارى هرگز تمام نمى‌شود و همه عددهاى كه قبل از نقطه شروع قرار گرفته‌اند ، بدون شماره باقى مى‌مانند. براى اينكه ضمن شماره‌گذارى، حتى يك عدد هم از قلم نيفتد، بايد اين مجموعه را در دو سطر و به صورت زير نوشت :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \dots \end{array}$$

و آنها را ستونى شماره‌گذارى كرد : براى 0 شماره 1، براى 1 - شماره 2، براى 1 شماره 3، براى 2 - شماره 4 وغيره. به زبان ديگر، همه عدد

های مثبت و صفر را با عددهای فرد، و همهٔ عددهای منفی را با عددهای زوج شماره گذاری می‌کنیم. این کاملاً شبیه راه حلی است که مدیر مهمانخانه، برای جادادن تمپرشناسها، در مهمانخانه‌ای که به وسیلهٔ جانورشناسان پر شده بود، مورد استفاده قرار داده بود.

ولی اگر شماره گذاری مجموعهٔ همهٔ عددهای درست به سادگی برگزار شد، برای اثبات شمارا بودن مجموعهٔ عددهای گویا به دشواری - هایی برمی‌خوریم. عددهای گویا کاملاً تنگ هم قرار گرفته‌اند: بین هر دو عدد گویای دلخواه، بی‌نهایت عدد گویای دیگر وجود دارد، به همین مناسبت برای شماره گذاری آنها بلا تکلیف می‌مانیم؛ به نظر می‌رسد که بین هر دو عدد دلخواه باید بی‌نهایت عدد را شماره گذاری کرد و این وضع هم هرگز پایان نمی‌یابد. حقیقت هم همین است که عددهای گویا را نمی‌توان به ردیف مقادیر صعودی آنها، شماره گذاری کرد.

ولی اگر فکر تنظیم عددهای گویا به صورت صعودی را کنار بگذاریم، می‌توانیم راهی برای شماره گذاری آنها پیدا کنیم. به این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا همهٔ کسرهای مثبت با مخرج ۱ را می‌نویسیم، بعد همهٔ کسرهای مثبت با مخرج ۲، سپس کسرهای مثبت با مخرج ۳ و غیره. جدولی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

روشن است که در این جدول هر عدد گویا و مثبت دلخواه را می‌توان پیدا کرد، ولی هر عدد تنها یکبار ظاهر نشده است. مثلاً عدد ۳ به صورتهای $\frac{3}{1}$ ، $\frac{6}{2}$ ، $\frac{9}{3}$ و غیره وجود دارد.

حالا به شماره گذاری می‌پردازیم. برای این منظور اقدام آخر مدیر مهمانخانه فضا را به خاطر می‌آوریم، که توانست ساکنین بی‌نهایت مهمانخانه دیگر را در اطاقهای مهمانخانه خود جادهد. او از شماره گذاری مربعی استفاده کرد. ماهم درست همان روش را بکار می‌بریم، با این تفاوت که در اینجا بعضی از کسرها را حذف می‌کنیم (مثلاً، چون $\frac{1}{1}$ را شماره ۱ دادیم، دیگر کسرهای $\frac{2}{2}$ ، $\frac{3}{3}$ و غیره را حذف می‌کنیم، زیرا آنها هم همان مقدار $\frac{1}{1}$ را بیان می‌کنند). در این صورت ردیف زیر برای شماره گذاری عددهای مثبت و گویا بدست می‌آید:

$$1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots$$

به این ترتیب توانستیم همه عددهای مثبت گویا را شماره گذاری کنیم. حالا دیگر به سادگی می‌توان فهمید که چگونه باید همه عددهای گویا (چه مثبت و چه منفی) را شماره گذاری کرد. برای این منظور باید آنها را در دو سطر جداگانه نوشت، عددهای يك سطر را با شماره‌های زوج و عددهای سطر دیگر را با شماره‌های فرد شماره گذاری کرد (و ضمناً صفر را هم جزو یکی از سطرها به حساب آورد).

بطور کلی، اگر مجموعه شمارایی از مجموعه‌های شمارا را روی هم بریزیم، مجموعه‌ای شمارا بدست می‌آید. این مطلب را به کمک شماره گذاری مربعی می‌توان بدست آورد.

عددهای جبری *

ما توانستیم همه عددهای گویا را شماره گذاری کنیم . ولی عددهای گویا تنها به کمک تقسیم و از عددهای طبیعی بدست می آیند (و ضمناً ممکن است علامت آن هم تغییر کند) . حالا عمل ریشه گرفتن را هم اضافه می کنیم و همه عددهایی را در نظر می گیریم که بتوان از عددهای طبیعی به کمک این عمل و عملهای حساب بدست آورد. بین این عددها می توان از

$$\sqrt[3]{2} + 1, \sqrt[4]{3 - \sqrt{6}} \text{ و حتی عددی مثل عدد زیر نام برد:}$$

$$\sqrt[7]{\sqrt[21]{\frac{\sqrt[15]{147 + \sqrt{3}} - \sqrt[14]{6 + \sqrt{2}}}{21}} + 1}$$

در برابر این پرسش قرار می گیریم: آیا می توان مجموعه همه این عددها را شماره گذاری کرد؟ پاسخ به این پرسش خیلی دشوارتر از مورد عددهای گویاست. کدام عدد را باید با شماره کوچکتري نوشت $\sqrt[3]{2}$ یا $\sqrt[3]{3}$ ؟ ولی ثابت می شود که این مجموعه شمارا است، یعنی عضوهای آنرا می توان شماره گذاری کرد.

برای اینکه این حکم را ثابت کنیم، ابتدا متذکر می شویم که هر عددی از این نوع، ریشه يك معادله جبری به صورت

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

است، که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ عددهایی صحیح اند. مثلاً

$$\frac{3}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \text{ ریشه معادله } 3x^2 - 7x - 3 = 0, \sqrt[3]{5} \text{ ریشه معادله } x^3 - 5 = 0 \text{ و } \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$$

ریشه معادله $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 11 = 0$ است. گاهی نوشتن معادله ای که عدد مفروض در آن صدق کند، بسیار مشکل است، ولی همیشه می توان به نتیجه رسید. حالا خودتان آزمایش کنید و معادله ای درست کنید که

عدد $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ در آن صدق کند.

متذکر می‌شویم که همهٔ ریشه‌های يك معادلهٔ به صورت (۱) را (به شرطی که $a_0, a_1, \dots, a_n$ عددهای صحیحی باشند) نمی‌توان با عددهای طبیعی و به کمک عملهای حساب و ریشه گرفتن بیان کرد. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ

$$x^5 - 3x + 3 = 0$$

را نمی‌توان به این صورت نشان داد، این معادله به اصطلاح به کمک رادیکالها حل نمی‌شود. همهٔ عددهایی که بتوانند ریشهٔ معادله‌ای از نوع (۱) با ضرایبهای صحیح باشند، عددهای جبری نامیده می‌شود. به این ترتیب مجموعهٔ عددهای جبری شامل همهٔ عددهایی هم هست که از عددهای طبیعی به کمک عملهای حساب و ریشه گرفتن بدست می‌آید. بنابراین اگر بتوانیم مجموعهٔ همهٔ عددهای جبری را شماره گذاری کنیم، به این معناست که مسألهٔ مورد نظر ما هم حل شده است.

ولی قبل از آنکه به شماره گذاری عددهای جبری بپردازیم، باید خود معادله‌های جبری به صورت (۱) را شماره گذاری کنیم، که البته در این صورت مشکل ما هم حل شده است. هر معادلهٔ جبری درجهٔ n ، حداکثر n ریشه دارد، به این ترتیب وقتی که همهٔ معادله‌های جبری با ضرایبهای صحیح را شماره گذاری کردیم، جدولی درست می‌کنیم، در سطر اول این جدول ریشه‌های مختلف معادلهٔ اول را قرار می‌دهیم، در سطر دوم تمام ریشه‌های مختلف معادلهٔ دوم را که با ریشه‌های معادلهٔ اول فرق دارند، در سطر سوم ریشه‌های متمایز معادلهٔ سوم را که با ریشه‌های معادله‌های اول و دوم فرق دارند و غیره. جدولی به این صورت بدست می‌آید:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \rightarrow & a_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & a_k \rightarrow \\ \rightarrow & b_1 & \rightarrow & b_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow b_l \rightarrow \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

$$\rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_m \rightarrow$$

.....

از اینجا روشن می شود که همهٔ عددهای این جدول را به چه ترتیب می توان شماره گذاری کرد (پیکانها ردیف شماره گذاری را مشخص می کند).

حالا به شماره گذاری مجموعهٔ معادله های جبری با ضریبهای صحیح می پردازیم. این عمل را به دو روش می توان انجام داد. روش اول این است که هر معادله

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

را به ترتیب «ارتفاع» آن قرار دهیم، یعنی عدد

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

مثلاً ارتفاع معادلهٔ $2x^4 - 3x + 5 = 0$ برابر است با:

$$4 + 2 + 3 + 5 = 14$$

روشن است که تعداد معادله های با ارتفاع مفروض، محدود است.

مثلاً دو معادله به ارتفاع ۲ هستند: $x = 0$ و $-x = 0$ ، شش معادله

به ارتفاع ۳ هستند: $x^2 = 0$ ، $-x^2 = 0$ ، $x + 1 = 0$ ، $x - 1 = 0$ ،

$-x + 1 = 0$ و $-x - 1 = 0$. و اکنون معادله ها را به این ترتیب شماره

گذاری می کنیم: ابتدا همهٔ معادله های با ارتفاع ۲ را شماره گذاری

می کنیم (معادلهٔ با ارتفاع ۱ وجود ندارد)؛ سپس همهٔ معادله های با

ارتفاع ۳، بعد همهٔ معادله های با ارتفاع ۴ و غیره. شروع این شماره

گذاری به این ترتیب است:

N	۱	۲	۳	۴	۵
	$x = 0$	$-x = 0$	$x^2 = 0$	$-x^2 = 0$	$x + 1 = 0$
N	۶	۷	۸	۹	۱۰
	$x - 1 = 0$	$-x + 1 = 0$	$-x - 1 = 0$	$x^3 = 0$	$-x^3 = 0$

در نتیجه همه معادله‌ها شماره گذاری می‌شود، و سپس همانطور که قبلاً گفتیم، به کمک آن، عددهای جبری هم شماره گذاری خواهد شد. روش مذکور برای شماره گذاری معادله‌ها، این نارسایی را دارد که به سختی می‌توان شماره يك معادله مفروض را پیدا کرد (اگرچه این مسأله هم حل شدنی است). راه حل دوم بر همان فکری قرار دارد که مدیر مهمانخانه مشهور فضا، می‌خواست مشکل بزرگ خود را براساس آن حل کند. به خاطر بیاوریم که اواز عددهای به صورت $2^n \times 3^m$ استفاده کرده بود. ما برای اینکه مسأله خود را حل کنیم از همه عددهای اول استفاده می‌کنیم. خواننده این مطلب را می‌داند که هر عدد طبیعی را تنها به يك طریق می‌توان به عاملهای اول تجزیه کرد.

به این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا همه عددهای صحیح را شماره گذاری می‌کنیم (آنطور که در ابتدای بند قبل صفحه ۹۶ انجام دادیم): شماره عدد صحیح را a با a نشان می‌دهیم. هر معادله به صورت

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

را (به یاد داشته باشیم که $a_0, \dots, a_n$ ، عددهایی صحیح‌اند) متناظر با این عدد قرار می‌دهیم:

$$2^{a_n} \times 3^{a_{n-1}} \times \dots \times p_{n+1}^{a_0}$$

p_{n+1} را به معنی $(n+1)$ امین عدد اول گرفته‌ایم. مثلاً معادله $3x^2 - 2 = 0$ متناظر با این شماره است:

$$2^4 \times 3^1 \times 5^5 = 150000$$

زیرا شماره عدد صحیح $2 - 4$ مساوی ۴، شماره صفر مساوی ۱ و شماره عدد صحیح ۳ مساوی ۵ است. حالا دیگر هر معادله‌ای، شماره خودش را دارد، ضمناً معادله‌های مختلف، شماره‌های مختلف خواهند داشت (هر عدد صحیح N تنها به يك طریق می‌تواند به عاملهای اول

تجزیه شود، یعنی تنها به یک طریق عددهای $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ را می‌دهد؛ این عددها هم متناظر با عددهای صحیح معین $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ هستند که در نتیجه متناظر به معادله مشخصی از $(a_0 x^n + \dots + a_n = 0)$.

علامتهای بی‌نهایت روی صفحه *

روشی را که برای شماره گذاری همه عددهای جبری بکار بردیم، می‌توان در حالت‌های دیگر هم مورد استفاده قرار داد، در اینجا وضعیت کلی چنین است: فرض کنید مجموعه شمارایی از مجموعه‌های شمارای $A_1, \dots, A_n, \dots$ داده شده باشد. از عضوهای این مجموعه‌ها «دسته» های محدودی تشکیل می‌دهیم، به نحوی که در هر دسته بیش از یک عضو از هر مجموعه A_k نباشد. به عبارت دیگر در هر دسته به صورت $(a_1, \dots, a_m)$ داشته باشیم: $a_1 \in A_1, \dots, a_m \in A_m$ (تعداد عضوهای دسته‌های مختلف می‌تواند مختلف باشد، تنها این مهم است که هر دسته شامل تعداد محدودی عضو باشد). در این صورت مجموعه همه این دسته‌ها، مجموعه‌ای شمارا است.

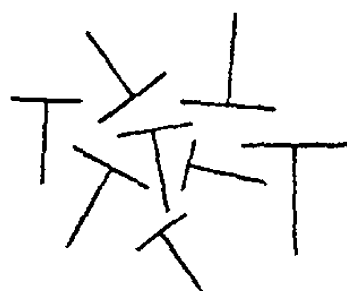
برای اثبات این حکم کافی است به هر دسته $(a_1, \dots, a_m)$ ، عددی نسبت دهیم:

$$N = p_m^{a_m} \dots p_1^{a_1}$$

که در آن p_m یعنی m امین عدد اول و غیره، a_m یعنی شماره عضو a_m در مجموعه A_m و غیره (در علامتگذاری اینجا، علامت m در عضو a_m نشان می‌دهد که این عضو متعلق به کدام مجموعه است، و شماره این عضو را در مجموعه A_m مشخص نمی‌کند). با استفاده از نوع استدلالی که در مورد معادله‌های جبری بکار بردیم، ثابت می‌شود که هر دسته‌ای متناظر با عدد خاصی است، یعنی مجموعه همه دسته‌ها قابل شماره گذاری

هستند. اگر مایل باشیم می‌توان به ترتیب دیگری عمل کرد: هر دسته $(a_1, \dots, a_m)$ را متناظر با «ارتفاع» خود $h = n + a_m \dots + a_1$ قرار داد، ابتدا دسته با ارتفاع ۲ را شماره‌گذاری کرد، سپس دسته با ارتفاع ۳ و غیره.

از حکمی که ثابت کردیم نتیجه می‌شود که اگر عضوهای مجموعه‌ای را بتوان با دسته‌هایی به صورت $(a_1, \dots, a_m)$ داد (که در آن a_1 عضو مجموعه شمارای A_1 ، a_2 عضو مجموعه شمارای A_2 و غیره باشد)، در این صورت خود مجموعه A یا شمارا است و یا متناهی. مثلاً مجموعه همه نقطه‌های صفحه که مختصات هریک از آنها عددهایی گویا باشد، يك مجموعه شمارا است: هر نقطه به معنی دسته‌ای از دو عدد گویای (r_1, r_2) است و مجموعه عددهای گویا هم، مجموعه‌ای شمارا است.

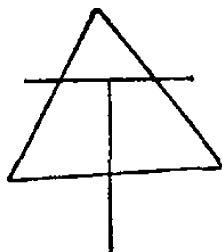


شکل ۲۵

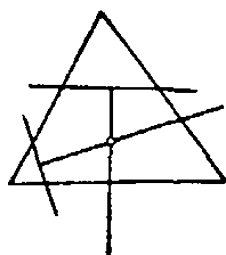
نمونه پیچیده‌تری از اثبات شمارا بودن يك مجموعه می‌آوریم: فرض کنید حرفهای T را روی صفحه قرار داده باشیم، به نحوی که هیچ دو حرفی نقطه مشترك نداشته باشند (اندازه‌های حرفها می‌تواند مختلف باشد - شکل ۲۵).

ثابت می‌کنیم که این مجموعه حرفهای T یا شمارا است و یا متناهی. برای این منظور دستگاه مختصات را روی صفحه انتخاب می‌کنیم و به هر حرف T مثلثی نسبت می‌دهیم که مختصات رأسهای آن عددهایی گویا باشد و يك ضلع آن «پایه» حرف T و دو ضلع دیگر آن «دو شاخه پهلویی» این حرف را قطع کرده باشد (شکل ۲۶).

از نظر هندسی روشن است که اگر دو حرف T متناظر با يك مثلث باشند، باید یکدیگر را قطع کرده باشند - شکل ۲۷ را ببینید (ولی، مثل

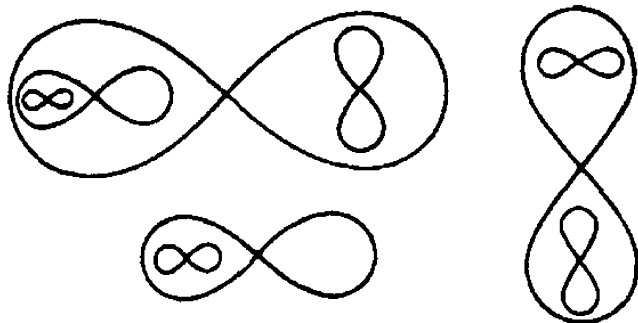


شکل ۲۷



شکل ۲۶

بسیاری از موارد دیگر که در ریاضیات پیش می‌آید، اثبات دقیق این حکم به هیچوجه ساده نیست. چون طبق شرط، حرفهای T دو به دو غیر متقاطع اند، بنابراین حرفهای متفاوت متناظر با مثلثهای متفاوت است. به این ترتیب باید ثابت کنیم که مجموعه مثلثهایی که انتخاب کرده‌ایم، مجموعه‌ای شمارا یا مجموعه‌ای محدود است. متذکر می‌شویم که هر مثلث به وسیله سه رأس خود A ، B و C و هر رأس به وسیله مختصات خود مشخص می‌شود. چون رأسهای مثلث را طوری انتخاب کردیم که مختصات هر کدام از آنها با دو عدد گویا بیان می‌شود، هر مثلث به وسیله شش عدد گویا مشخص می‌شود که مختصات رأسهای آن است. ولی مجموعه دسته‌های شش تایی عددهای گویا، مجموعه‌ای شمارا است. بنابراین مجموعه مثلثهای با رأسهای «گویا» در نتیجه مجموعه مثلثهایی که ما برای حرف T ساختیم، یا مجموعه‌ای شمارا و یا مجموعه‌ای متناهی است. به این ترتیب مجموعه حرفهای T هم یا شمارا و یا متناهی است.



شکل ۲۸

درست با همین روش می‌توان ثابت کرد که اگر علامتهای ∞ (بی‌نهایت) را طوری روی صفحه رسم کنیم که دو به دو نقطهٔ مشترکی نداشته باشند (شکل ۲۸)، مجموعهٔ آنها یا شمارا ویا متناهی است.

مجموعه‌های نامساوی

تا اینجا برای ما روشن شده است که جملهٔ «تعداد عضوهای دو مجموعه برابرند» چه معنایی دارد.

حالا روشن می‌کنیم که جملهٔ «يك مجموعه بیشتر از مجموعهٔ دیگر عضو دارد» بچه‌معناست. برای مجموعه‌های متناهی هم می‌توان این مطلب را، بدون شمردن عضوهای آنها، روشن کرد. کافی است نمونه‌ای را که پیش از این دربارهٔ مجلس رقص ذکر کردیم، به خاطر آوریم.

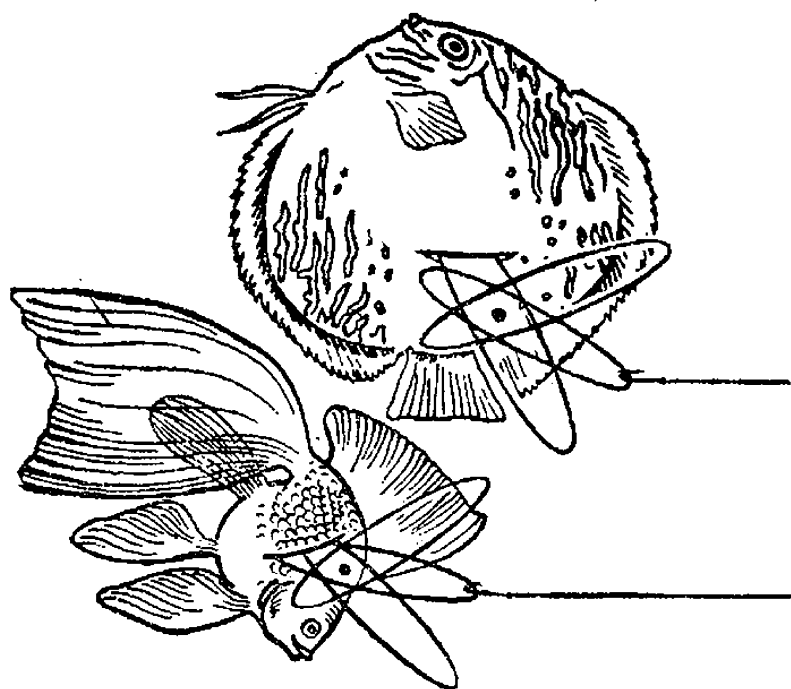


وقتی که از کستر شروع به نواختن می‌کند و پسرها، دخترها را به رقص دعوت می‌کنند، اگر چند پسری دست و پا نتوانند زوجی را برای خود پیدا کنند، روشن می‌شود که تعداد پسرها بیشتر است. و اگر تعدادی از دخترها با دلتنگی تماشاچی زوجهایی باشند که در صحنهٔ رقص‌اند، روشن می‌شود که تعداد دخترها بیشتر است.

در این حالتها به این ترتیب عمل کرده‌ایم: بین يك مجموعه و قسمتی از مجموعهٔ دیگر، تناظر يك به يك برقرار کرده‌ایم. اگر به این کار موفق شویم، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ دوم، نسبت به مجموعهٔ



اول ، تعداد بیشتری عضو دارد . با استفاده از همین روش می‌توان نتیجه گرفت که تعداد ماهیهای اقیانوسها کمتر از تعداد اتمهای روی کره زمین است (با وجودی که این دو مجموعه متناهی‌اند ، آیا می‌توانید عضوهای آنها را بشمارید؟) . برای این منظور کافی است هر ماهی را با یکی از اتمهای تشکیل‌دهنده بدن ماهی ، متناظر کنیم . به این ترتیب بین مجموعه همه ماهیها و قسمتی از مجموعه اتمهای موجود در کره زمین ، تناظر يك به يك برقرار می‌شود .



هر ماهی به يك اتم

متأسفانه برای مجموعه‌های نامتناهی نمی‌توان به همین سادگی عمل کرد . مادر همین کتاب دیده‌ایم که چگونه تعداد عضوهای يك مجموعه ، با تعداد

عضوهای قسمتی از آن مجموعه، برابر است. بنا براین تنها از این حقیقت که مجموعه A به تعداد قسمتی از مجموعه B عضو دارد، نمی‌شود نتیجه گرفت که تعداد عضوهای مجموعه A کمتر از تعداد عضوهای مجموعه B است.

باید عبارت را ساده‌تر کنیم و بگوییم: اگر مجموعه A بتواند با قسمتی از مجموعه B در تناظر يك به يك قرار گیرد، به این معناست که مجموعه B ناکثر از مجموعه A عضو دارد. می‌توان ثابت کرد که این رابطه، دارای تمام خاصیت‌های خوب نامساویهاست:

- (۱) هر مجموعه A عضوهایی ناکثر از خود این مجموعه دارد.
- (۲) اگر عضوهای مجموعه A ناکثر از عضوهای مجموعه B ، و عضوهای مجموعه B ناکثر از عضوهای مجموعه C باشد، در این صورت عضوهای مجموعه A ناکثر از عضوهای مجموعه C است.
- (۳) اگر عضوهای مجموعه A ناکثر از عضوهای مجموعه B ، و عضوهای مجموعه B ناکثر از عضوهای مجموعه A باشد، در این صورت تعداد عضوهای آنها برابر است (یعنی بین عضوهای این دو مجموعه می‌توان تناظر يك به يك برقرار کرد).

ممکن است پیش آید که مجموعه B ناکثر از مجموعه A عضو داشته باشد، ولی این دو مجموعه هم‌ارز نباشند. به عبارت دیگر ممکن است بین مجموعه A و زیرمجموعه B_1 از مجموعه B ، تناظر يك به يك برقرار باشد، ولی بین مجموعه A و تمام مجموعه B این تناظر يك به يك برقرار نشود. و این همان حالتی است که ما خواهیم گفت، عضوهای مجموعه B بیشتر از عضوهای مجموعه A است.

مجموعه شمارا - کوچکترین بین بی‌نهایتها*

قبلاً دیدیم که هر زیر مجموعه نامتناهی، از مجموعه عدد های

طبیعی ، مجموعه‌ای شمارا است . از اینجا نتیجه می‌شود که نمی‌توان مجموعه نامتناهی پیدا کرد که قوت آن کمتر از قوت مجموعه شمارا باشد ، حالا ثابت می‌کنیم که در مجموعه نامتناهی زیرمجموعه شمارا وجود دارد ، و از آنجا نتیجه می‌گیریم که قوت مجموعه شمارا از قوت هر مجموعه نامتناهی نابیشتر است ، یعنی این قوت در بین بی‌نهایتها ، کمترین است .

برای اینکه زیرمجموعه‌ای شمارا از مجموعه نامتناهی A انتخاب کنیم ، به این ترتیب عمل می‌کنیم . عضوی مانند x_1 را انتخاب می‌کنیم ، این انتخاب همیشه ممکن است ، زیرا مجموعه A نامتناهی و در هر حالتی غیرتهی است . روشن است که بعد از خارج کردن عضو x_1 ، مجموعه A خالی نمی‌شود و می‌توانیم عضو دوم x_2 را از آن جدا کنیم . بعد از آن ، عضو سوم x_3 را انتخاب می‌کنیم و غیره . در نتیجه ، از مجموعه A ، زیرمجموعه شمارایی که عضوهای آن شماره گذاری شده‌اند ، بیرون آورده می‌شود :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

برای تکمیل این اثبات ، می‌توان اضافه کرد که بعد از جدا کردن زیرمجموعه شمارا ، مجموعه نامتناهی باقی می‌ماند . برای این منظور باید بعد از آنکه زیر مجموعه X را بیرون آوردیم ، همه عضوهای با شماره‌های زوج را به جای خود برگردانیم . در نتیجه مثل این است که زیر مجموعه شمارای

$$Y = \{x_1, x_2, x_5, \dots\}$$

را بیرون آورده‌ایم و مجموعه‌ای باقی مانده است که باز هم شامل بی‌نهایت عضو است :

$$\{x_3, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots\}$$

و ممکن است عضوهای بسیار دیگری هم داشته باشد .

قضیه‌های زیر به سادگی ثابت می‌شود:

اگر به يك مجموعه نامتناهی ، يك مجموعه شمارا اضافه شود، در قوت آن تغییری به وجود نمی‌آید.

اگر از يك مجموعه ناشمارا ، مجموعه شمارایی را جدا کنیم ، قوت آن تغییر نمی‌کند.

این دو قضیه باز هم تأیید می‌کنند که مجموعه‌های شمارا ، بین مجموعه‌های نامتناهی ، کوچکترین آنها هستند .

مجموعه‌های ناشمارا

همه مجموعه‌هایی که تا اینجا ساخته‌ایم، مجموعه‌های شمارا بودند. این پرسش به ذهن می‌رسد که آیا بطور کلی همه مجموعه‌های نامتناهی ، شمارا نیستند ؟ اگر اینطور بود، زندگی ریاضی‌دانها آرام و ساده بود: همه مجموعه‌های نامتناهی به تعداد مساوی عضو دارند و هیچ تحلیل دیگری از بی‌نهایت لازم نبود . ولی معلوم شده است که مطلب پیچیده‌تر از اینهاست، مجموعه‌های ناشمارا وجود دارد، آن‌هم با قوت‌های مختلف. یکی از مجموعه‌های ناشمارا، که همه به‌خوبی با آن آشنا هستیم، مجموعه همه نقطه‌های روی يك خط راست است . ولی قبل از آنکه در باره این مجموعه صحبت کنیم ، مجموعه دیگری را مطرح می‌کنیم که خیلی به این مجموعه نزدیک است و به روشهای مختلف پر کردن مهمانخانه غیرعادی مربوط می‌شود .

متذکر می‌شویم که اثبات ناشمارا بودن يك مجموعه به هیچوجه ساده نیست. برای اینکه ثابت کنیم يك مجموعه، شمارا است، کافی است درباره قانونی فکر کنیم که بنا بر آن بشود عضوهای مجموعه را شماره گذاری کرد. درحالی‌که برای اثبات ناشمارا بودن يك مجموعه، باید ثابت کرد که چنین قانونی وجود ندارد و نمی‌تواند وجود داشته باشد. به عبارت

دیگر درباره قانونی نمی توان فکر کرد که به کمک آن بشود شمارا نبودن عضوهای يك مجموعه را ثابت کرد . کانتود ، برای اثبات ناشمارا بودن مجموعه ها ، روش جالبی فکر کرد که نام حرکت قطری به آن داده شده (و ما در صفحه ۲۱ ماهیت آنرا آورده ایم) . روش کانتود را با این داستان ایون تیخی روشن می کنیم .

صورت برداری ناموفق

تا اینجا من از موفقیت های مدیر مهمانخانه غیرعادی صحبت کردم : چگونه او توانست در مهمانخانه ای که تمام اطاقهای آن پر بود ، باز هم بی نهایت مستأجر ساکن کند ؛ سپس حتی موفق شد ساکنین مجموعه نامتناهی از همین نوع مهمانخانه غیرعادی را در مهمانخانه خود جا دهد . ولی وضعی پیش آمد که این افسونگر بی نظیر هم دچار عدم موفقیت شد .

از مرکز مؤسسه مهمانخانه های فضایی دستوری رسید که از قبل همه انواع ممکن پر کردن اطاقها را مشخص کنند . خواسته شده بود که جدولی تنظیم شود ، به نحوی که هر سطر آن یکی از حالتها را نشان دهد . برای این منظور می بایست اطاقهای پر با واحد و اطاقهای خالی با صفر مشخص شود . مثلاً حالت

۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰۰ . . .

به این معناست که همه اطاقهای با شماره فرد پر و همه اطاقهای با شماره زوج خالی است ، حالت

۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ . . .

به این معناست که همه اطاقهای مهمانخانه پر است ، و حالت

۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ . . .

که نشانه يك ورشکستگی مالی است . به معنای آن است که تمام اطاقهای

مهمانخانه خالی است .

مدیر کارهای زیادی داشت و به همین مناسبت فکر کرد این مسأله را بطور ساده ای حل کند. در هر طبقه يك نگهبان بود و او می توانست به نسبت اطاقهایی که در اختیار دارد ، حالت های مختلف پر کردن آنها را مشخص کند . ضمناً توجه می کنند که حالت های تکراری وجود نداشته باشد. بعد از چند روز صورتهای به مدیر داده شد و او آنها را در يك صورت جمع کرد .

مدیر پرسید:

- خیال می کنید این صورت کامل باشد ، آیا حالت خاصی از قلم نیفتاده است ؟

جواب داد :

- معلوم نیست ، تعداد حالتها بی نهایت است و من نمی دانم چطور باید آزمایش کرد که آیا حالت دیگری وجود دارد یا نه .

ناگهان فکری به نظر آمد (اگرچه ممکن است درباره قابلیت فکر خود مبالغه کرده باشم ، زیرا بحثهایی که با پروفسور قاداتوف درباره مجموعه های بی نهایت داشته ام ، در این باره بی اثر نبوده است) .

- من می توانم ثابت کنم که این صورت کامل نیست و حالتی را ارائه می دهم که بدون تردید در این صورت وجود ندارد .

- با این مطلب که صورت کامل نیست موافقم ، ولی چطور می شود حالتی را که از قلم افتاده است ، نشان داد. آخر در اینجا بی نهایت حالت وجود دارد .

ما در این باره شرط بستیم . من کار خود را شروع کردم . برنامه هر حالت را بر در اطاقی که شماره اش با شماره آن حالت تطبیق می کرد نصب کردم (خواننده به خاطر دارد که تعداد حالتها با تعداد اطاقهای مهمانخانه یکی بود) . و بعد خیلی ساده عمل کردم . به در اطاق اول مراجعه

کردم و دیدم که حالت متناظر با آن ، با رقم ۵ شروع می شود. در دفتر یادداشت خود رقم ۱ را نوشتم، این رقم اول حالتی بود که من می خواستم بدست بیاورم .

وقتی که به در اطاق دوم رفتم ، دیگر به رقم اول حالتی که روی آن نصب بود ، توجه نکردم ، زیرا رقم اول حالت مورد نظر خود را قبلاً انتخاب کرده بودم . توجه خود را به رقم دوم برگرداندم. دیدم که رقم دوم در حالتی که روی در دوم نصب شده ، مساوی ۱ است ، من در دفتر خود رقم ۵ را یادداشت کردم . به همین ترتیب در مورد رقم سوم حالت مورد نظر خود عمل کردم ، به در اطاق سوم مراجعه کردم ، رقم سوم حالت مربوط به این اطاق ۱ بود و من در دفتر خود ۵ را یادداشت کردم. بطور کلی اگر رقم n ام مربوط به حالت n ام مساوی ۵ بود ، من در دفتر خود ۱ را یادداشت کردم و اگر رقم n ام حالت n ام مساوی ۱ بود ، من ۵ را یادداشت کردم .

وقتی که همه اطاقهای مهمانخانه را تمام کردم^۱ ، در دفتر خود دنباله ای از صفرها و واحدها را یادداشت کرده بودم .

به اطاق مدیر برگشتم و گفتم :

- این همان حالت گمشده ای است که شما می خواستید .

- از کجا معلوم است که این حالت وجود نداشت ؟

- این حالت نمی تواند همان حالت اول باشد ، زیرا رقم اول آنها

با هم فرق دارد، حالت دوم هم نیست ، زیرا رقم دوم آنها یکی نیست، با حالت سوم هم در رقم سوم متفاوت است و بطور کلی با حالت n ام در رقم n ام فرق دارد .

شرطاً برده بودم و حق سکونت مجانی دایمی در مهمانخانه را بدست

آوردم .

(۱) و معلوم نیست برای این کار چقدر وقت صرف کرده است ؟

در عین حال معلوم شد علت اینکه حالت‌های مختلف را نمی‌توان با مجموعه‌ای شمارا بیان کرد، این است که همیشه می‌توان حالتی پیدا کرد که در این مجموعه وجود ندارد. و این به معنای آن است که مجموعه همه انواع پرکردن مهمانخانه، مجموعه‌ای ناشمارا است و مسئله در مقابل مدیر حل نشدنی باقی ماند.

تصمیم گرفتند در این باره تلگرافی تنظیم شود. باید گفت که در این مهمانخانه غیرعادی، تلگراف هم غیرعادی بود، علامت‌های تلگراف هم از بی‌نهایت (البته مجموعه‌ای شمارا) نقطه و خط تشکیل می‌شد، مثلاً به این صورت

و غیره

من فوراً متوجه شدم که مجموعه همه انواع تلگرافها هم ناشمارا است، زیرا می‌توان به جای نقطه و خط، ۰ و ۱ قرار داد و در این صورت به مسئله‌ای کاملاً شبیه مسئله انواع پرکردن مهمانخانه می‌رسیم. تلگرام فرستاده شد و من به گرمی از مدیر مهمانخانه خدا حافظی کردم تا به طرف کم‌کشان ر.گ. ت-۶۷۸ پرواز کنم تا طبق مأموریتی که داشتم، فیلمهایی از آنجا تهیه کنم . . .

ناشمارای متصله

حالا دیگر می‌توانیم بدون دشواری ثابت کنیم که مجموعه همه نقطه‌های واقع بر یک خط راست، مجموعه‌ای ناشمارا است. به جای این مجموعه، می‌توان از مجموعه همه عددهای حقیقی صحبت کرد، زیرا هر نقطه از خط راست متناظر با یک عدد حقیقی است و برعکس. هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت یک کسر اعشاری نامتناهی نوشت، به این ترتیب:

$$a/a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

بعضی از این عددها ، دو نماد دارند ، مثلاً $0/5000$ و $0/4999$ ، يك عدد را بیان می کنند. برای مشخص بودن وضع ، ما از نماد اول ، که با صفر ، نوشته شده است ، استفاده می کنیم.

فرض می کنیم به طریقی موفق شده باشیم که همه عددهای حقیقی را شماره گذاری کنیم . برای اینکه ثابت کنیم این فرض درست نیست ، کافی است لا اقل يك عدد بدون شماره پیدا کنیم . با به خاطر آوردن روش ایون تیخی ، به این ترتیب عمل می کنیم :

ابتدا صفر را می نویسیم و ممیزی بعد از آن می زنیم . سپس عددی را که شماره اول را ، در شماره گذاری عددهای حقیقی ، بخود گرفته است انتخاب می کنیم و اولین رقم بعد از ممیز (یعنی اولین رقم اعشاری) را در نظر می گیریم . اگر این رقم غیر از ۱ باشد ، در عددی که ما می خواهیم بنویسیم ، به عنوان اولین رقم بعد از ممیز ، ۱ را قرار می دهیم ، و اگر این رقم مساوی ۱ باشد ، ما رقم ۲ را بعد از ممیز می نویسیم ، بعد به عدد شماره ۲ می پردازیم و تنها رقم دوم بعد از ممیز را در آن مورد توجه قرار می دهیم . دوباره ، اگر این رقم مساوی واحد نباشد ، ما در عدد خود به جای سدگان ۱ را قرار می دهیم ، و اگر این رقم مساوی واحد باشد ، رقم ۲ را انتخاب می کنیم . به همین ترتیب جلو می رویم ، هر بار برای رقم n ام عدد خود ، به رقم n ام عدد شماره n توجه می کنیم . در نتیجه به عددی می رسیم مثل

$$N = 0/1121211000$$

روشن است که این عدد هیچ شماره ای ندارد ، زیرا رقم اول اعشاری آن با عدد شماره ۱ فرق دارد ، رقم دوم آن با عدد شماره ۲ ، رقم سوم آن با عدد شماره ۳ و ... بطور کلی رقم n ام بعد از ممیز در این عدد با رقم n ام عدد شماره n متفاوت است و غیره (با صفحه ۲۱ مقایسه کنید). برای اینکه خواننده بهتر متوجه شود که چگونه عدد بدون شماره

بدست می‌آید، فرض می‌کنیم که در شماره‌گذاری عددهای حقیقی، پنج عدد اول به این صورت باشند:

$$4/27364 \dots$$

$$- 1/31226 \dots$$

$$7/95471 \dots$$

$$0/62419 \dots$$

$$8/56280 \dots$$

در این صورت، عددی که در شماره‌گذاری عددهای حقیقی وجود ندارد، با پنج رقم اعشاری زیر شروع می‌شود:

$$0/12121 \dots$$

بدیهی است که این عدد تنها نیست و عددهای بسیاری می‌توان پیدا کرد که بدون شماره باشند (مثلاً می‌توان رقمهای غیر از ۲ را به ۲ و رقمهای مساوی ۲ را به ۷ تبدیل کنیم و یا هر جور دیگر). ولی برای ما کافی است که تنها يك عدد بدون شماره پیدا کنیم تا ثابت شود که فرض ما در مورد امکان شماره‌گذاری عددهای حقیقی، درست نیست.

وجود عددهای غیر جبری (ترانساندانت) *

گفتیم که عدد جبری به عددی گفته می‌شود که بتواند ریشه معادله

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

با ضریبهای صحیح، باشد. عددی که نتواند ریشه چنین معادله‌ای باشد، غیر جبری^۱ نامیده می‌شود.

در دوره طولانی از حیات علمی، ریاضی‌دانها تنها با عددهای

جبری مثل $\frac{7}{15}$ ، $\sqrt[4]{10}$ ، $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ و غیره سروکار داشتند. تنها در سال

۱۸۴۴ بود که لیوویل ریاضی‌دان فرانسوی، در اثر کوششهای زیاد خود،

(۱) عدد غیر جبری را در کتابهای فارسی، متعالی هم گفته‌اند

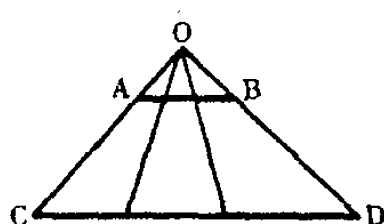
موفق شد چند عدد غیر جبری را پیدا کند . اثبات غیر جبری بودن عدد π هم ، که در سال ۱۸۸۲ و به وسیله لیندمان انجام گرفت ، يك پیش آمد بزرگ علمی بود ، زیرا از آنجا عدم امکان تربیع دایره ثابت می شد . و یکباره معلوم شد که عددهای جبری ، که در هر قدم به آنها برخورد می کنیم ، در واقع کمیاب ترند ، در حالی که عددهای غیر جبری ، که به دشواری بدست می آیند ، مجموعه پهناتر را تشکیل می دهند . در واقع ما دیدیم که عددهای جبری ، يك مجموعه شمارا تشکیل می دهند ، در حالی که مجموعه همه عددهای حقیقی ، همانطور که ثابت کردیم ، مجموعه ای ناشمارا می باشد . به این ترتیب اختلاف مجموعه عددهای حقیقی و مجموعه عددهای جبری (یعنی مجموعه عددهای غیر جبری) ، خود مجموعه ای ناشمارا می شود .

اثبات وجود عددهای غیر جبری ، که در سال ۱۸۸۳ و به وسیله کانتور داده شد ، اثرات بزرگ و شگفتی در ریاضیات باقی گذاشت . کانتور توانسته بود وجود عددهای غیر جبری را ثابت کند ، بدون اینکه حتی يك نمونه مشخص از این عددها را بسازد ، بلکه تنها فراوانی وجود آنها را مسلم ساخته بود . ولی همین مطلب که ارزش اثبات کانتور را می رساند ، جنبه ضعف آنها هم نشان می دهد .

از قضیه لیوویل راه ساده ای برای ساختن نمونه های مشخص عددهای غیر جبری بدست می آید . مثلاً عدد $0/1010010000001 \dots$ يك عدد غیر جبری است ، که در آن بعد از اولین واحد - يك صفر ، بعد از واحد دوم - دو صفر ، بعد از واحد سوم - شش صفر و بطور کلی بعد از واحد n ام - n صفر قرار گرفته است . در حالی که از روش استدلال کانتور نمی توان مستقیماً راهی برای ساختن نمونه ای از عددهای غیر جبری پیدا کرد ؛ این استدلال ، به اصطلاح ریاضی دانه ، غیر سازنده است : در این استدلال تنها فرض عدم وجود عددهای غیر جبری به تناقض کشیده می شود و دیگر هیچ .

نقطه‌های واقع بر پاره خطهای بلند و کوتاه هم‌مدندند

تا وقتی که خواننده با شگفتیهای مجموعه‌های نامتناهی آشنا نبود، در برابر این پرسش که: «کجا تعداد نقطه‌ها بیشتر است، روی پاره خط به طول يك ميليمتر يا روی پاره خط به طول يك متر؟» بدون اینکه سایه تردید بر قضاوت او افتاده باشد، به روشنی می‌گفت: يك متر ۱۰۰۰ بار بزرگتر از يك ميليمتر است و بنابراین در همانجا هم، تعداد نقطه‌ها بیشتر است. ولی حالا، احتمالاً خواننده ما از اظهار نظر درباره مجموعه‌های بی‌نهایت و مددخواهی از آنچه که در زندگی عادی آموخته

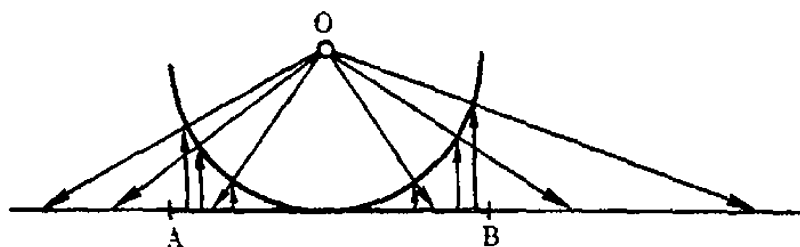


شکل ۲۹

است، پرهیز کند. و در واقع هم تعداد نقطه‌های واقع بر پاره خط کوچک برابر است با تعداد نقطه‌های واقع بر پاره خط بزرگتر. به عبارت دیگر، همیشه می‌توان بین نقطه‌های

دو پاره خط، تناظر يك به يك برقرار کرد. درستی این مطلب را می‌توانید به روشنی در شکل ۲۹ ببینید.

به سختی می‌توان به این فکر تسلیم شد که روی پاره خطی به طول يك ميلیون سال نوری همانقدر نقطه وجود دارد که روی شعاع هسته اتم.

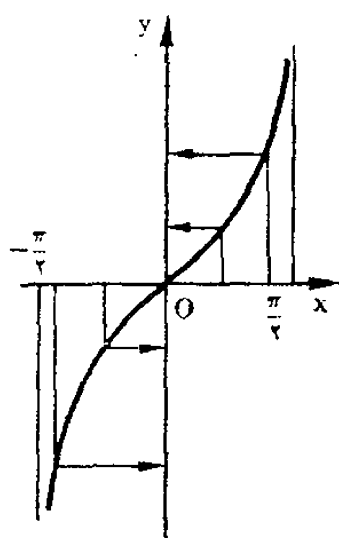


شکل ۳۰

ولی شگفتی‌آورتر است وقتی که بدانیم روی يك خط نامتناهی همانقدر نقطه است که روی يك پاره خط، یعنی بین مجموعه نقطه‌های

واقع بر يك خط نامتناهی و مجموعه نقطه‌های واقع بر يك پاره خط می توان
تناظر يك به يك برقرار کرد .

حتی می توانیم تمام پاره-
خط را انتخاب نکنیم و دو انتهای
آنها حذف کنیم (یعنی به جای يك
فاصله بسته ، يك فاصله باز اختیار
کنیم) . در شکل ۳۰ می بینیم که
چگونه می توان بین این فاصله باز
(پاره خط بدون دو انتها) و خط
راست ، تناظر يك به يك برقرار
کرد . ابتدا نقطه‌های این فاصله را
روی نیمه‌دایره منعکس می کنیم ،
سپس نقطه‌های نیمه‌دایره را روی خط



شکل ۳۱

راست تصویر می کنیم (تصویر مرکزی) . روشن است که با این روش هر
نقطه این فاصله با یکی و فقط با یکی از نقطه‌های خط راست متناظر
می شود ، ضمناً حتی يك نقطه از خط راست هم کنار گذاشته نمی شود.
این تناظر را به طریق دیگری هم می توان برقرار کرد: به کمک منحنی
تانژانتی ، نمایش تغییرات تابع $y = tg x$ (شکل ۳۱) .

پاره خط و مربع

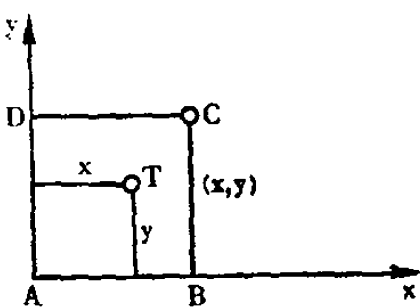
ریاضی دانها، علی رغم میل خود، به این حقیقت که تعداد نقطه‌های
واقع بر يك خط راست برابر است با تعداد نقطه‌های واقع بر يك پاره خط،
تسلیم شدند . با وجود این ، نتیجه بعدی که کانتود گرفت ، باز هم غیر
منتظره بود . کانتود ، برای جستجوی مجموعه‌هایی که بیشتر از يك پاره
خط عضو داشته باشد، متوجه مجموعه نقطه‌های داخل يك مربع شد. نمی شد

تردیدی برای نتیجه گیری داشت: پاره خط کاملاً بر یکی از ضلعهای مربع قابل انطباق است، ولی خود مجموعه همه پاره خطهایی که رویه مربع را پوشانده اند، دارای همان قوت مجموعه نقطه های يك پاره خط است.

کانتود در طول سه سال (از ۱۸۷۱ تا ۱۸۷۴) در جستجوی این مطلب بود که ثابت کند بین نقطه های واقع بر يك پاره خط و نقطه های واقع در داخل مربع، نمی توان تناظر يك به يك برقرار کرد.

سالها گذشت و نتیجه مورد نظر بدست نیامد. ولی ناگهان و بطور غیرمنتظره ای توانست تناظری را که ناممکن می پنداشت، ثابت کند. خود او هم به نتیجه ای که بدست آورده بود، باور نداشت. او به ددکیند ریاضی دان نوشت: «من نتیجه را می بینم، ولی آنرا باور نمی کنم».

ولی همه چیز در جهت تسلیم به این حقیقت بود که تصور قبلی اشراقی نادرست است، و در مربع همانقدر نقطه وجود دارد که روی يك پاره خط. اثبات دقیق این حکم کمی مشکل است و به همین مناسبت ما تنها استخوان بندی اثبات کانتود را طرح می کنیم.



شکل ۳۲

پاره خط $[0, 1]$ و مربع به ضلع مساوی ۱ را انتخاب می کنیم. این مربع را می توان به نوعی که در شکل ۳۲ نشان داده شده است، قرارداد. می خواهیم بین نقطه های پاره خط و مربع، تناظر يك به يك برقرار کنیم. تصویر نقطه های مربع

بر پاره خط AB کمکی به ما نمی کند، زیرا هر نقطه پاره خط AB ، می تواند تصویر بی نهایت نقطه از مربع باشد (مثلاً همه نقطه های پاره خط DA ، روی نقطه A تصویر می شود).

مسأله را به این طریق حل می کنیم: هر نقطه T از مربع $ABCD$

را می‌توان به‌وسیله دو عدد x و y ، مختصات این نقطه، مشخص کرد (یا بطور ساده‌تر، هر نقطه این مربع به‌وسیله فاصله‌های آن تا ضلعهای AB و AD مشخص می‌شود). این عددها را می‌توان به صورت کسره‌های اعشاری نامتناهی نوشت. چون x و y از واحد بزرگتر نیستند، این کسرها به صورت زیر خواهند بود:

$$x = 0/\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots \quad (1)$$

$$y = 0/\beta_1\beta_2 \dots \beta_n \dots \quad (2)$$

(برای سهولت کار، نقطه‌های واقع بر ضلعهای مربع را در نظر نمی‌گیریم و تنها به نقطه‌های داخلی آن می‌پردازیم). در اینجا α_n و β_n ، رقمهای اعشاری عددهای x و y هستند، مثلاً اگر $x = 0/63205\dots$ و $y = 0/21357\dots$ باشد، $\alpha_1 = 6$ ، $\alpha_2 = 3$ ، $\alpha_3 = 2$ و غیره، و $\beta_1 = 2$ ، $\beta_2 = 1$ ، $\beta_3 = 3$ و غیره خواهد بود.

حالا باید نقطه‌ای مانند Q از پاره خط AB را پیدا کنیم که متناظر با نقطه T باشد. کافی است طول پاره خط AQ را پیدا کنیم. طول این پاره خط را مساوی عدد z می‌گیریم که رقمهای اعشاری آن از طریق «برزدن» رقمهای اعشاری عددهای x و y بدست می‌آید. به عبارت دیگر از دو نماد (۱) و (۲)، نماد سومی می‌سازیم که رقمهای اعشاری آن به این ترتیب انتخاب شده باشد:

$$z = 0/\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 \dots \alpha_n\beta_n \dots$$

مثلاً اگر داشته باشیم:

$$x = 0/515623\dots$$

$$y = 0/734856\dots$$

می‌نویسیم:

$$z = 0/571354682536\dots$$

نقطه z بر پاره خط $[A, B]$ قرار دارد و روشن است که نقطه‌های مختلف مربع، متناظر با نقطه‌های مختلف پاره خط است. اگر دو نقطه

T' و T برهم منطبق نباشند ، لااقل یکی از رقمهای اعشاری عددهای x و x' یا y و y' با هم متفاوت خواهد بود ، و همین مطلب به معنای آن است که عددهای اعشاری z و z' برهم منطبق نیستند . با تحلیل مفصلتری ثابت می شود که در این صورت دو نقطه متناظر z و z' هم منطبق بر یکدیگر نیستند .

از این راه همه نقطه های پاره خط بدست نمی آید . مثلاً نقطه $z = 0/191919...$ را باید از زوج $x = 0/111...$ و $y = 0/999...$ بدست آورد که متناظر با یکی از نقطه های واقع بر ضلع مربع است و شرط ما این بود که نقطه های واقع بر ضلع های مربع را به حساب نیاوریم . بنابراین ضمن نگاشت مربع بر پاره خط ، نقطه z تصویر هیچ نقطه ای از مربع نیست .

به این ترتیب ، بین نقطه های مربع و قسمتی از نقطه های پاره خط [۱۰] ، تناظر يك به يك برقرار کردیم . این مطلب ثابت می کند که مجموعه نقطه های مربع ، قوتی نابیشتر از قوت مجموعه نقطه های پاره خط دارد . ولی قوت آن کمتر هم نیست و بنابراین این قوتها برابرند . * با کمی تغییر در بحث ، می توان بین تمام نقطه های مربع و تمام نقطه های پاره خط ، تناظر يك به يك برقرار کرد . برای این منظور باید رقمهای مختصات را با احتیاط بیشتری به هم مخلوط کرد .

دوباره به جای تمام مربع $ABCD$ ، تنها قسمتی از آنرا که با حذف ضلع های BC و CD بدست می آید ، انتخاب می کنیم . مختصات نقطه های این قسمت در نامساویهای $0 \leq x < 1$ و $0 \leq y < 1$ صدق می کنند . این مختصات را می توان به صورت کسرهای اعشاری نامتناهی نوشت ، ضمناً این کسرها نمی توانند به رقمهای متوالی مساوی ۹ ختم شوند .

حالا رقمهایی را که در نماد اعشاری x و y وجود دارد به گروههایی تقسیم می کنیم : بعد از هر رقم غیر ۹ ، خط قائم کوتاهی می کشیم . مثلاً

اگر داشته باشیم :

$$x = 0/3994599967 \dots$$

$$y = 0/959978090 \dots$$

تقسیم به گروهها به این صورت خواهد بود :

$$x \sim 3|994|5|9996|7| \dots$$

$$y \sim 95|997|8|0|90| \dots$$

حالا این گروهها را شبیه حالت قبل ، داخل هم می کنیم . دنباله نامتناهی گروههای رقمها بدست می آید :

$$3|95|994|997|5|8|9996|0|7|90| \dots$$

خطهای قائم را حذف می کنیم و به جلو آن صفر قرار می دهیم ، این کسر اعشاری بدست می آید :

$$z = 0/3959949975899960790 \dots$$

که متناظر با نقطه $M(x, y)$ از مربع است .

می توان ثابت کرد که این تناظر بین نقطه های مربع $0 \leq x < 1$ ، $0 \leq y < 1$ و فاصله $0 \leq z < 1$ ، يك تناظر متقابل يك به يك است . حالا دیگر به سادگی می توان تناظر بین نقطه های تمام مربع $ABCD$ و نقطه های يك پاره خط را برقرار کرد . برای این منظور کافی است پاره خطی به طول ۳ انتخاب کرد و تناظر يك به يك را بین قسمتی از مربع ، یعنی $0 \leq x < 1$ ، $0 \leq y < 1$ با فاصله $0 \leq z < 1$ برقرار نمود و سپس بین خط شکسته BCD و پاره خط $1 \leq z \leq 3$ این تناظر را برقرار نمود . *

نه تنها مربع ، بلکه مکعب هم دارای همان تعداد نقطه است که يك پاره خط ، بطور کلی هر شکل هندسی که لا اقل يك خط داشته باشد ، دارای همانقدر نقطه است که يك پاره خط . اینگونه مجموعه ها را ، مجموعه های با قوت متصله گویند (به عبارت دیگر اگر مجموعه A با مجموعه عددهای حقیقی هم عدد باشد ، A قوت متصله دارد) . مجموعه

تلگرامهای نامتناهی هم قوت متصله دارد (صفحه ۱۱۴ را ببینید) .

معلوم نیست چرا یکی از مسأله‌ها حل نمی‌شود؟

تا اینجا با دو نوع مجموعه نامتناهی آشنا شده‌ایم. یکی از آنها همعد با مجموعه عددهای طبیعی است، و دیگری همعد با مجموعه نقطه‌های روی خط راست. معلوم شد که در مجموعه دوم، عضوهای بیشتری وجود دارد. بطور طبیعی سؤالی پیش می‌آید: آیا مجموعه «بینابینی» وجود ندارد که بیشتر از مجموعه عددهای طبیعی و کمتر از مجموعه نقطه‌های واقع بر خط راست، عضو داشته باشد؟ این سؤال به مسأله متصله مشهور شده است. در باره این مسأله، بسیاری از ریاضی‌دانهای مشهور (خود کانتور و ریاضی‌دانهای بعد از او) فکر کرده‌اند، ولی تا زمان ما این مسأله حل نشده باقی مانده است. ن. ن. لوزین، ریاضی‌دان بزرگ و بنیان‌گذار مکتب شوروی نظریه تابعهای با متغیرهای حقیقی، سالهای زیادی درباره مسأله متصله فکر کرد؛ ولی حل مسأله، مثل سراب بیابان از دسترس دور می‌شد (لوزین در جریان تلاش برای حل این مسأله، يك رشته مسأله‌های مشکل مربوط به نظریه مجموعه‌ها را حل کرد و شاخه کاملی در ریاضیات به نام نظریه ترسیمی مجموعه‌ها به وجود آورد).

يك روز نوجوان پانزده ساله‌ای به نام لوان شیرلیمان، که استعداد ریاضی فوق‌العاده‌ای داشت، نزد لوزین آمد (بعدها او یکی از ریاضی‌دانهای مشهور شوروی شد). لوزین برای اینکه استعداد ریاضی‌دان جوان را آزمایش کند، سی مسأله دشوار در مقابل او گذاشت. لوزین حل ۲۹ مسأله را می‌دانست، اما مسأله سی‌ام، مسأله متصله بود. ولی ریاضی‌دان جوان بعد از يك هفته نزد لوزین برگشت و با اندوه گفت: «معلوم نیست چرا یکی از مسأله‌ها حل نمی‌شود».

ناکامی در حل مسأله متصله، تضادفی نبود. موقعیت این مسأله،

تاریخ پوستولات مربوط به خطهای موازی را به یاد می آورد. در يك دوره دوهزار ساله، کوشش کردند که این پوستولات را از دیگر اصلهای هندسی نتیجه بگیرند. بعد از کارهای لوپاچوسکی، هیلبرت و دیگر دانشمندان، روشن شد که این پوستولات تناقضی با اصلهای دیگر ندارد، ولی ضمناً نمیتواند به عنوان نتیجه ای از آنها بدست آید.

در اینجا هم به نظر می رسد که در اصل موضوعی کردن نظریه مجموعه ها، حکم مربوط به وجود قوت بینابینی متناقض با دیگر اصلها نیست (نتیجه گیری ریاضی دان آلمانی ک. گودل - سال ۱۹۳۸)، ولی نمیتواند از آنها نتیجه شود (این مطلب در همین گذشته نزدیک، تقریباً در يك زمان و بدون ارتباط با هم، به وسیله کوئن امریکایی در سالهای ۱۹۶۳ - ۱۹۶۴ و وینکا اهل چک در سال ۱۹۶۴، ثابت شد).

آیا مجموعه ای با بزرگترین قوت وجود دارد؟ *

بزرگترین قوتی که تا اینجامی شناسیم، عبارت است از قوت مجموعه نقطه های واقع بر يك خط راست، یعنی قوت متصله. نه مجموعه نقطه های مربع و نه مجموعه نقطه های مکعب، هیچکدام قوت بزرگتری ندارند. آیا قوت متصله، بزرگترین قوتها نیست؟ معلوم شده است که نه. علاوه بر آن اصلاً مجموعه با بزرگترین قوت وجود ندارد. برای هر مجموعه A ، مجموعه دیگری وجود دارد که قوت آن بیشتر از قوت مجموعه A است. این مجموعه، مثلاً مجموعه B و عبارت است از مجموعه همه تابعهایی که بروی A داده شده و مقادیر ۰ و ۱ را قبول می کنند.

ابتدا ثابت می کنیم که قوت مجموعه B کمتر از قوت مجموعه A نیست. برای این منظور، هر نقطه a از مجموعه A را متناظر با تابع $f_a(x)$ می گیریم که در این نقطه مقدار ۱ و در بقیه نقطه ها مقدار ۰ را

قبول می‌کند. روشن است که نقطه‌های مختلف، متناظر با تابعهای مختلف است. مثلاً اگر مجموعه A از سه نقطه ۱، ۲، ۳ تشکیل شده باشد، نقطه ۱ متناظر با تابعی است که در این نقطه مقدار ۱ را قبول می‌کند، در حالی که نقطه ۲ متناظر با تابعی است که در نقطه ۱، مقدار ۰ را قبول می‌کند، و این تابعها مساوی یکدیگر نیستند.

به این ترتیب قوت مجموعه B کمتر از قوت مجموعه A نیست. حالا ثابت می‌کنیم که این قوتها مساوی یکدیگر نیستند، یعنی تناظر يك به يك بين عضوهای مجموعه‌های A و B وجود ندارد. روش برهان خلف را انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم که چنین تناظری وجود داشته باشد.

در این صورت تابعی را که متناظر با عضو a از مجموعه A است، با $f_a(x)$ نشان می‌دهیم. به خاطر می‌آوریم که همه تابعهای $f_a(x)$ تنها دو مقدار ۰ و ۱ را قبول می‌کنند.

تابع جدید $\varphi(x)$ را در نظر می‌گیریم که از تساوی زیر بدست می‌آید:

$$\varphi(x) = 1 - f_x(x)$$

برای اینکه مقدار تابع $\varphi(x)$ را در نقطه‌ای مانند a از A پیدا کنیم، ابتدا باید تابع $f_a(x)$ متناظر این نقطه را بدست آوریم و مقدار این تابع را به ازای $x = a$ کم کنیم. روشن است که تابع $\varphi(x)$ هم به روی A داده می‌شود و تنها مقادیر ۰ و ۱ را قبول می‌کند. بنابراین $\varphi(x)$ عبارت است از عضوهایی از مجموعه B . ولی در این صورت طبق فرض، $\varphi(x)$ متناظر با نقطه‌ای مانند b از A است، یعنی

$$\varphi(x) = f_b(x)$$

با در نظر گرفتن تساوی اول برای $\varphi(x)$ ، برای همه مقادیر x از A ، بدست می‌آید:

$$1 - f_x(x) = f_b(x)$$

در این تساوی $x = b$ می‌گیریم . در این صورت بدست می‌آید :

$$1 - f_b(b) = f_b(b)$$

و بنابراین :

$$f_b(b) = \frac{1}{2}$$

ولی این نتیجه، متناقض با آن است که مقادیر تابع $f_b(x)$ مساوی ۰ و ۱ است . این تناقض ثابت می‌کند که تناظر يك به يك بين مجموعه‌های A و B نمی‌تواند وجود داشته باشد .

به این ترتیب برای هر مجموعه A ، می‌توان مجموعه B را با قوت بیشتر ساخت ، یعنی مجموعه‌ای با بزرگترین قوت وجود ندارد .

متذکر می‌شویم که مجموعه B را به ترتیب دیگری هم می‌توان ساخت . مجموعه B را می‌توان به عنوان همه زیرمجموعه‌های مجموعه A در نظر گرفت . C را زیرمجموعه‌ای از A در نظر می‌گیریم . تابع $f(x)$ را مساوی ۱ می‌گیریم به شرطی که داشته باشیم $x \in C$ ، و مساوی ۰ به شرطی که داشته باشیم $x \notin C$. روشن است که زیرمجموعه‌های مختلف متناظر با تابعهای مختلف اند . برعکس هر تابع $f(x)$ ، که دو مقدار ۰ و ۱ را قبول می‌کند ، متناظر با زیرمجموعه‌ای از A است ، که به ازای عضوهای x آن ، این تابع مقدار ۱ را قبول می‌کند . بنابراین بین مجموعه تابعهایی که بروی مجموعه A داده شده است و مقادیر ۰ و ۱ را قبول می‌کند ، و مجموعه همه زیرمجموعه‌های A ، تناظر يك به يك برقرار می‌شود .

حساب بی‌نهایت *

ما با قوتهای مجموعه‌های مختلف آشنا شده‌ایم . همانطور که قبلاً هم گفته شد ، مفهوم قوت تعمیم مفهوم تعداد عضوهای يك مجموعه متناهی است . ولی روی عدهای طبیعی می‌توان عملهای حساب را انجام

داد : می‌توان آنها را با هم جمع کرد ، از هم کم کرد ، در هم ضرب کرد و غیره . این عملها انعکاسی از بعضی عملهای روی مجموعه‌ها هستند . مثلاً جمع عددهای طبیعی متناظر با اجتماع دو مجموعه متناهی از هم جدا است . اگر در یکی از این مجموعه‌ها m عضو ، و در دیگری n عضو وجود داشته باشد ، در اجتماع آنها $m + n$ عضو وجود دارد .

به‌همین ترتیب ، عملهای روی قوتها هم تعریف شده است . برای قوتها علامتهای خاصی در نظر گرفته شده است . مثلاً قوت مجموعه‌های شمارا با $\aleph_0$ نشان داده می‌شود ($\aleph$ ، نخستین حرف الفبای عبری قدیم است و الف نامیده می‌شود) . قوت متصله را با C (تسه - گوتیک) ، قوت مجموعه همه تابعیهایی را که بروی محور حقیقی داده می‌شود با f و غیره نشان می‌دهند .

قوتها را می‌توان کاملاً شبیه عددهای طبیعی با هم جمع کرد . اگر قوت مجموعه A مساوی m و قوت مجموعه B مساوی n ، و ضمناً دو مجموعه A و B از هم جدا باشد ، قوت مجموعه $A + B$ را به $m + n$ نشان می‌دهند . از خاصیتهای اجتماع مجموعه‌ها ، نتیجه می‌شود که

$$m + n = n + m$$

$$m + (n + p) = (m + n) + p$$

ولی بسیاری از قاعده‌های جمع قوتهای بی‌نهایت ، به قاعده‌های عادی حساب شباهت ندارد . از این حقیقت نباید تعجب کرد ، زیرا همانطور که می‌دانیم ، خاصیتهای مجموعه‌های نامتناهی هیچ شباهتی به خاصیتهای مجموعه‌های متناهی ندارد . مثلاً در حساب بی‌نهایت ، این تساویها درست است :

$$۱) \quad n + \aleph_0 = \aleph_0'$$

$$۲) \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0'$$

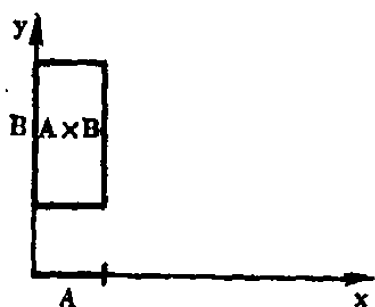
$$۳) \quad \aleph_0 + C = C'$$

$$۴) \quad C + C = C,$$

$$۵) \quad C + f = f$$

رابطه اول به این معناست که اجتماع يك مجموعه متناهی بيا يك مجموعه شمارا ، عبارت است از يك مجموعه شمارا ؛ رابطه دوم نشان می دهد که از اجتماع دو مجموعه شمارا ، يك مجموعه شمارا بدست می آید ؛ رابطه سوم می گوید که اجتماع يك مجموعه شمارا با مجموعه قوت متصله ، يك مجموعه قوت متصله می دهد ؛ و خواننده خود می تواند معنای سایر رابطه ها را خود روشن کند .

حالا ببینیم که قوتهای بی نهایت را چگونه در هم ضرب می کنند . برای این منظور باید قبلاً بدانیم که ضرب عددهای طبیعی با کدام عمل روی مجموعه ها مربوط می شود فرض کنید که A مجموعه ای شامل m عضو ، و B مجموعه ای شامل n عضو باشد . مجموعه جدید $A \times B$ را تشکیل می دهیم که عضوهای آن همه زوجهای ممکنه (a, b) باشد ، که در آن $a \in A$ و $b \in B$ است . اگر



عضوهای مجموعه اول را $a_1, \dots, a_m$ ، و عضوهای مجموعه دوم را $b_1, \dots, b_n$ بنامیم ، این زوجها را می توان به صورت جدول زیر منظم کرد :

شکل ۲۳

$$(a_1, b_1) \dots (a_1, b_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(a_m, b_1) \dots (a_m, b_n)$$

روشن است که تعداد این زوجها برابر است با mn ، یعنی حاصلضرب عددهای m و n .

به انجام همین عمل روی مجموعه های نامتناهی می پردازیم . A

B را دو مجموعه نامتناهی فرض کنید. حاصلضرب مستقیم آنها را $A \times B$ می‌نامیم که عضوهای آن همه زوجهای ممکنه (a, b) باشد، با شرط $a \in A$ و $b \in B$. مثلاً، اگر A مجموعه نقطه‌های پاره خط $[0, 1]$ و B مجموعه نقطه‌های پاره خط $[1, 3]$ باشد، مجموعه $A \times B$ را می‌توان به وسیله نقطه‌های مستطیلی که در شکل ۳۳ نشان داده شده است، مشخص کرد. در واقع، هر نقطه این مستطیل متناظر با دو تصویر آن روی محورها است.

اگر قوت مجموعه A مساوی m و قوت مجموعه B مساوی n باشد، قوت مجموعه $A \times B$ را به mn نشان می‌دهیم. قانونهای زیر برای ضرب قوتها وجود دارد:

$$mn = nm$$

$$(mn)p = m(np),$$

$$m(n + p) = mn + mp$$

و بالاخره این تساویها درست است:

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 C = C$$

$$CC = C$$

رابطه اول نشان می‌دهد که اگر A و B دو مجموعه شمارا باشند، مجموعه همه زوجهای (a, b) ($a \in A$ و $b \in B$) نیز شماراست و این نوع دیگری از تنظیم همان حکم است که: از اجتماع مجموعه شمارایی از مجموعه‌های شمارا، يك مجموعه شمارا بدست می‌آید. تساوی $CC = C$ نشان می‌دهد که تعداد نقطه‌های پاره خط برابر است با تعداد نقطه‌های روی مربع، زیرا C یعنی تعداد نقطه‌های روی پاره خط و CC یعنی تعداد نقطه‌های در حاصلضرب مستقیم پاره خط در خودش، یا به عبارت دیگر تعداد نقطه‌های روی مربع.

توان بی نهایت *

از آنجا که ما دیگر می‌توانیم قوتها را در هم ضرب کنیم ، می‌توانیم هر قوت را به توان دلخواهی با نمای طبیعی برسانیم . حالا روشن می‌کنیم که چگونه توان يك قوت را با نمای بی‌نهایت می‌توان بدست آورد ، یعنی معنای m را روشن می‌کنیم . برای این منظور دوباره به مجموعه‌های متناهی برمی‌گردیم و مجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم که تعداد عضوهای آن مساوی m باشد .

به این ترتیب عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد. BA را مجموعه‌ای می‌گیریم که عضوهای آن عبارت باشند از همهٔ تابعهای ممکن که روی مجموعه A داده شده و مقادیری در مجموعه B قبول می‌کنند. به عبارت دیگر، هر عضو مجموعه BA قانونی را نشان می‌دهد، که طبق آن عضو a از مجموعه A ، در مقابل عضو $b = f(a)$ از مجموعه B قرار می‌گیرد. مثلاً فرض کنید که مجموعه A از سه عدد: ۱ و ۲ و ۳، و مجموعه B از دو عضو: نقطه و خط، تشکیل شده باشد؛ در این صورت عضوهای مجموعه BA از «تابعهایی» به صورت $f(1) = 0$ ، $f(2) = 0$ ، $f(3) = -$ یا $f(1) = -$ ، $f(2) = 0$ ، $f(3) = 0$ تشکیل شده است. این «تابعها» را می‌توان بطور ساده به وسیلهٔ دنباله‌هایی از نقطه و خط داد، که از سه علامت تشکیل شده باشد. به سادگی دیده می‌شود که تعداد این دنباله‌ها مساوی ۸، یعنی 2^3 است، به این ترتیب:

• • • ♯ • • ♭ ♯ • ♭ • ♯ • ♭ ♭ ♯

— . . ǰ — . — ǰ — — . ǰ — — —

ما $2^3 = 8$ دنباله بدست می آوریم ، و این تصادفی نیست . اگر مجموعه A از m عضو ، و مجموعه B از n عضو تشکیل شده باشد ، BA از m^n عضو تشکیل می شود . از خواننده می خواهیم که خود این حکم را

ثابت کند .

حالا دیگر می‌توانیم روشن کنیم که اگر m و n قوتهای بی‌نهایت باشند ، n^m چه معنایی دارد . مجموعه A را با قوت m و مجموعه B را با قوت n انتخاب می‌کنیم و BA را مجموعه همه «تابعهایی» می‌گیریم که روی A داده شده و مقادیری در B قبول می‌کنند ؛ قوت این مجموعه هم n^m است .

قبلاً دیدیم که برای هر مجموعه A ، قوت مجموعه تابعهایی که روی A داده شده و مقادیر 0 و 1 را قبول می‌کنند، بیشتر از قوت خود مجموعه A است . این به معنای آن است که برای هر قوت m ، این نامساوی درست است :

$$2^m > m$$

و همچنین خاطر نشان می‌کنم که :

$$C = 2^{\aleph_0}$$

قبلاً هم دیدیم که مجموعه همه تلگرامهای بی‌نهایت ، دارای قوت متصله هستند . ولی هر تلگرام بی‌نهایت، چیزی نیست جز تابعی که روی مجموعه عددهای طبیعی داده شده است و تنها دو مقدار نقطه و خط را قبول می‌کند . به این ترتیب مجموعه همه تلگرامهای بی‌نهایت قوتی مساوی $2^{\aleph_0}$ دارد . درواقع تساوی مورد نظر ما هم ثابت شد .

مجموعه‌های مرتب

قوت مجموعه (یا آنطور که گاهی می‌گویند : عدد اصلی مجموعه) تنها نیمی از کار عددهای طبیعی را انجام می‌دهد . می‌دانیم که عددهای طبیعی تنها برای پاسخ گفتن به پرسش «چقدر ؟» بکار نمی‌رود ، بلکه علاوه بر آن به پرسش «در کدام ردیف ؟» هم پاسخ می‌دهد . به عبارت دیگر ، ما تنها از «دو» ، «پنج» و «بیست» صحبت نمی‌کنیم ، بلکه

«دوم»، «پنجم» و «بیستم» را هم بکار می‌بریم. قوت مجموعه، هیچ تصویری دربارهٔ اینکه عضوهای مجموعه، چگونه مرتب شده‌اند، بدست نمی‌دهد. با وجود آنکه مجموعه همهٔ عددهای صحیح به تعداد مجموعهٔ عددهای طبیعی عضو دارد، مرتب کردن عددهای صحیح را با شیوه‌های مختلف می‌توان انجام داد. در مجموعهٔ عددهای طبیعی، نخستین عضو وجود دارد، در حالی که در مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح، چنین عضو نخستینی وجود ندارد.

بنابراین عدد اصلی (یا قوت) مجموعه‌ها، برای بررسی، ردیف استقرار عضوها در مجموعه کافی نیست و به مفهوم تازه‌ای نیاز داریم. ابتدا مفهوم مجموعهٔ مرتب را می‌آوریم. گویند مجموعهٔ A مرتب است، وقتی که برای هر زوج از عضوهای آن مفهوم نامساوی $a < b$ تعریف شده باشد، و این نامساوی باید خاصیت‌های زیر را داشته باشد:

(۱) اگر $a < b$ ، آنگاه $a \neq b$ ؛

(۲) اگر $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.

مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی، مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا، مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی و غیره، به سادگی مرتب می‌شود. در مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط هم می‌توان ترتیب را وارد کرد؛ مثلاً $a + bi < c + di$ می‌گیریم، وقتی که یا $a < c$ و یا $a = c$ و $b < d$ باشد. با این قرارداد خواهیم داشت: $2 + 15i < 3 + 10i$ و $2 + 5i < 2 + 4i$ ، به همین ترتیب می‌توان مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایها را مرتب کرد. متذکر می‌شویم که مفهوم ترتیب را به طریقه‌های مختلف می‌توان در یک مجموعه وارد کرد. مثلاً مجموعهٔ همهٔ کلمه‌های متفاوتی را که در این کتاب بکار رفته است، در نظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان مثلاً به این ترتیب مرتب کرد: کتاب را برمی‌داریم و شروع به خواندن می‌کنیم و همهٔ کلمه‌های تازه‌ای را که به ترتیب برخورد می‌کنیم، یادداشت می‌نماییم.

در این حالت قانون مرتب بودن را می توان به این صورت توضیح داد: کلمه A قبل از کلمه B قرار می گیرد ، وقتی که ضمن خواندن کتاب به کلمه A ، قبل از کلمه B برخورد کنیم .

ولی به ترتیب دیگری هم می توان عمل کرد : کلمه A را قبل از کلمه B به حساب آوریم ، وقتی که در فرهنگ الفبایی ، کلمه A قبل از کلمه B باشد . روشن است که این دو نوع مرتب بودن اعضا برای يك مجموعه ، با هم فرق دارد .

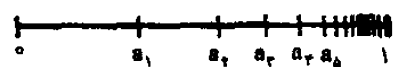
دومجموعه مرتب A و B را از يك نوع مرتب گویند ، وقتی که بدون برهم خوردن ردیف اعضا ، بتوان تناظر يك به يك بین آنها برقرار کرد . به زبان دیگر اگر $a_1 b_1$ و $a_2 b_2$ ، آنگاه از $a_1 < a_2$ نتیجه شود $b_1 < b_2$. مثلاً هر دو پاره خط ، به يك نوع مرتب اند . تناظر يك به يك بین نقطه های دو پاره خط ، که در شکل ۲۹ نشان داده شده است ، ردیف نقطه ها را عوض نمی کند . همچنین تناظری که در شکل ۳۰ بین يك خط و يك پاره خط (با حذف دو انتهای آن) برقرار کردیم ، ترتیب نقطه ها را حفظ می کند . ولی پاره خط و خط راست به دو نوع مختلف مرتب شده اند . البته بین آنها هم می توان تناظر يك به يك برقرار کرد ، منتهمی این تناظر ردیف را به هم می زند ، زیرا در پاره خط نقطه های ابتدا و انتها وجود دارد ، در حالی که در خط راست چنین نقطه هایی وجود ندارد .

مجموعه های خوش ترتیب

حتی مجموعه های شمارا را می توان با روشهای مختلف مرتب کرد . مجموعه همه عددهای طبیعی ، مجموعه همه عددهای صحیح و مجموعه همه عددهای گویا ، مجموعه هایی شمارا هستند . ولی مرتب بودن این مجموعه ها ، بکلی با هم فرق دارد . در مجموعه عددهای طبیعی ، نخستین عضو وجود دارد (عدد ۱) . در حالی که نه در مجموعه همه

عددهای صحیح و نه در مجموعه همه عددهای گویا، عضو نخستین وجود ندارد. از طرف دیگر در مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه عددهای صحیح، می توان دو عضو نشان داد که بین آنها هیچ عضو دیگری از این مجموعه ها وجود نداشته باشد (مثل عددهای ۵ و ۶)، در حالی که بین هر دو عضو دلخواه از مجموعه همه عددهای گویا، بی نهایت عضو از همین مجموعه وجود دارد.

کانتود، برای اینکه این مجموعه های مرتب مختلف را از هم جدا کند، نوع خاصی از مجموعه های مرتب را، که بعضی از خاصیت های آنها را می توان کاملاً از روی خاصیت های مجموعه عددهای طبیعی فهمید، در گروه جداگانه ای قرار داد. اگر



شکل ۳۴ - a

در مجموعه عددهای طبیعی یک زیر مجموعه غیر تهی انتخاب کنیم،

بین عضو های این زیر مجموعه، کوچکترین (یا سمت چپ ترین) عضو وجود دارد. کانتود به مجموعه هایی که دارای چنین خاصیتی باشند، مجموعه های خوش ترتیب نام نهاد، به عبارت دیگر، مجموعه مرتب A وقتی خوش ترتیب است که هر زیر مجموعه غیر تهی آن دارای نخستین عضو باشد.

همانطور که گفتیم ساده ترین مجموعه خوش ترتیب، مجموعه عددهای طبیعی است. این مجموعه را می توان روی نیم خط $(0, \infty)$ به وسیله نقطه های ۱، ۲، ۳، ... نشان داد. ولی نگاشت خط روی پاره خط، که در شکل ۳۵ نشان داده شده است، ردیف نقطه ها را حفظ می کند. بنابراین نیم خط $(0, \infty)$ را می توان به فاصله باز $(0, 1)$ تبدیل کرد. به این ترتیب به جای نقطه های ۱، ۲، ۳، ...، می توان نقطه هایی روی فاصله $(0, 1)$ انتخاب کرد. مجموعه نامتناهی نقطه های $a_1, a_2, \dots$ ، بدست می آید که به نقطه ۱ نزدیک می شوند (شکل ۳۴ - a).

حالا نقطه ۱ را در نظر می گیریم . این نقطه را با عددهای معمولی نمی توان شماره گذاری کرد، زیرا تمام شماره ها را برای نقطه های $a_1, a_2, \dots, a_n$ بکار برده ایم . برای اینکه این نقطه را هم شماره گذاری کنیم ، به عدد تازه ای نیاز داریم ، که در میان عددهای طبیعی یافت نمی شود ، از آنجا که نقطه ۱ بعد از همه نقطه های $a_1, \dots, a_n$ قرار گرفته است (که به کمک عددهای معمولی شماره گذاری شده اند) ، این عدد جدید را « ترانسفینی » نامیده اند (از کلمه های لاتینی *trans* به معنی « بعد از » و *finitae* به معنی « متناهی ») و این عدد ترانسفینی را که بلافاصله بعد از همه عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ... قرار گرفته است با ω نشان می دهند . به این ترتیب نقطه ۱ با علامت a_ω نشان داده می شود . مجموعه A همه نقطه های $a_1, \dots, a_n, \dots, a_\omega$ خود یک مجموعه خوش ترتیب است (فکر کنید چرا ؟) .

و حالا نقطه های مجموعه A را به بعد از ۱ می بریم . به این ترتیب که نقطه a_1 به نقطه $a'_1 = a_1 + 1$ ، نقطه a_2 به نقطه $a'_2 = a_2 + 1$ و غیره برده شود . در نتیجه مجموعه B بدست می آید که از نقطه های $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots, a'_\omega$ تشکیل شده است . به سادگی می توان تحقیق کرد که مجموعه $A + B$ خوش ترتیب است . عضوهای آنرا شماره گذاری کنیم . نقطه های مجموعه A را شماره گذاری کرده ایم . نقطه a'_1 بلافاصله بعد از نقطه a_ω قرار دارد (شکل ۳۴ - b را ببینید) ، بنابراین طبیعی است که



شکل ۳۴ - b

آنرا با عدد ترانسفینی $\omega + 1$ شماره گذاری کنیم ، یعنی $a'_1 = a_\omega + 1$. به همین ترتیب برای نقطه بعدی یعنی a'_2 که به وسیله عدد ترانسفینی $\omega + 2$

شماره گذاری می شود. نقطه a'_{ω} ، که بعد از همه نقطه های $a_{\omega} + 1, \dots$ ،
 $a_{\omega} + n, \dots$ می آید و به وسیله عدد ترانسفینی 2ω شماره گذاری می شود:
 $a'_{\omega} = a_{2\omega}$.

احتمالاً خواننده خود متوجه شده باشد که می توان مجموعه A را دوباره به جلو برد و نقطه های جدیدی بدست آورد، که با عدد های $2\omega + 1, \dots, 2\omega + n, \dots, 3\omega$ شماره گذاری می شوند. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، مجموعه خوش ترتیبی بدست می آید که از نقطه هایی تشکیل شده است و این نقطه ها به وسیله عددهای ترانسفینی به شکل $k\omega + n$ شماره گذاری شده اند ($n < k$ عددهایی طبیعی اند).

ولی در این ساختمان، عددهای ترانسفینی تمام نمی شود. زیرا به این ترتیب ما دوباره به مجموعه ای می رسیم که روی تمام نیم خط $(0, \infty)$ قرار گرفته است، و ضمناً روی هر پاره خط $(n, n+1)$ از این نیم خط، بی نهایت نقطه از مجموعه ما وجود دارد. دوباره نگاشت نیم خط $(0, \infty)$ را روی فاصله باز $(0, 1)$ بدست می آوریم. مجموعه نقطه هایی بدست می آید که مرتباً به ۱ نزدیک می شود. برای شماره گذاری نقطه ۱، به عدد ترانسفینی تازه ای نیاز داریم که آنرا به ω^2 نشان می دهیم. بعد از آن می توان عددهای ترانسفینی $1 + \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^n, \dots$ ، و حتی ω^{ω} را ساخت. این عدد ترانسفینی هم وجود دارد:

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega \\ \omega \\ \omega \\ \omega \end{array}$$

ولی ما بیش از این روی این مطلب بحث نمی کنیم.

قبلاً گفتیم که بعضی از مجموعه‌ها را می‌توان به طریقه‌های مختلف مرتب کرد. آیا بطور کلی می‌توان هر مجموعه‌ای را مرتب کرد، و اگر بتوان، آیا همیشه می‌توان از يك مجموعه مفروض، مجموعه خوش‌ترتیبی بدست آورد؟ بسیاری از ریاضی‌دانها روی این مسأله کار کرده‌اند، مگر نه این است که از حل مثبت نتیجه می‌شود که هر مجموعه‌ای را می‌توان به كمك عددهای ترانسفینی شماره‌گذاری کرد؟

ناگهان راه حل ساده و کوتاهی در سال ۱۹۰۴ به وسیلهٔ ادنست تسرملهو منتشر شد. او ثابت کرد که هر مجموعه‌ای را می‌توان خوش‌ترتیب کرد (کانثود در سال ۱۸۸۳، این نتیجه را پیش‌بینی کرده بود). ولی اثبات تسرملهو مورد پسند همهٔ ریاضی‌دانها قرار نگرفت. مطلب بر سر این است که این اثبات بر حکمی متکی است که برای خود او و دیگر ریاضی‌دانها، به هیچوجه واضح نیست. این حکم، که بعدها به نام اصل انتخاب یا اصل تسرملهو معروف شد، چنین است:

فرض کنید که در مقابل شما چند کوبهٔ سیب قرار گرفته باشد. روشن است که می‌توان از هر کوبه، سیبی انتخاب و آنها را در کوبهٔ جدیدی جمع کرد. به نظر می‌رسد که همین عمل را می‌توان در حالتی هم که در هر کوبه بی‌نهایت سیب وجود دارد و تعداد کوبه‌ها هم بی‌نهایت است، انجام داد. اصل انتخاب هم همین است:

اگر مجموعهٔ نامتناهی، از مجموعه‌های نامتناهی، مفروض باشد، بدون اینکه از قبل قانونی برای انتخاب معین شده باشد، می‌توان از هر مجموعه يك عضو را انتخاب کرد.

مطلب بر سر این است که اصل انتخاب منجر به اثباتی می‌شود که بکلی غیر سازنده است، یعنی مثلاً ثابت می‌کند که نمی‌تواند مجموعه‌ای وجود داشته باشد که نتواند مرتب باشد، ولی هیچگونه روش سازنده‌ای

برای مرتب کردن مجموعه ، از این اثبات بدست نمی آید . ریاضی دانها در طول سالهای زیادی از اصل انتخاب استفاده می کردند و درستی آنرا واضح به حساب می آوردند . ولی هرچه در باره آن بیشتر دقت کردند ، بیشتر به معمایی بودن آن پی بردند . بسیاری از قضیه هایی که به کمک اصل انتخاب ثابت شده بود ، بکلی با حکمهای روشن ، متناقض درآمد به همین مناسبت برتراند راسل ریاضی دان مشهور ، درباره این اصل چنین می گوید :

« در ابتدا روشن به نظر می رسد ، ولی هرچه عمیق تر در باره آن فکر می کنم ، نتیجه های عجیب و غریب تری از آن بدست می آورم و در آخر از فهم این مطلب صرف نظر می کنم که این اصل چه معنی دارد » .
 باوجود این ، بسیاری از ریاضی دانها با آسودگی خاطر در بررسیهای خودشان ، از اصل انتخاب استفاده می کنند .

در همین گذشته نزدیک ، به اثبات این مطلب توفیق یافته اند که اصل انتخاب نه با دیگر اصلهای مجموعه ها متناقض است و نه می تواند از آنها نتیجه شود .

دو سیب از يك سیب

در باره یکی از نتیجه های شگفت اصل انتخاب صحبت می کنیم .
 احتمالاً شما بارها شاهد کار شعبده بازهای تردست در صحنه بوده اید . شعبده باز کیسه خالی را به تماشاچی نشان می دهد ، بعد يك گلوله در آن می اندازد و دوتا خارج می کند ، دو گلوله می اندازد و چهارتا خارج می کند ، چهار گلوله را در کیسه می اندازد و هشت تا از آن بیرون می آورد . البته در این مورد همه می دانند که هیچ معجزه ای صورت نمی گیرد و هرچه هست در « تردستی » شعبده باز است . ولی در نظریه مجموعه ها ، چنین معجزه ای وجود دارد .

يك سيب معمولی انتخاب می‌کنیم و آنرا به نحوی به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم . به نظر روشن می‌رسد که اگر تنها دوتا از این قسمتها را انتخاب کنیم، نمی‌توان از آنها يك سيب كامل درست کرد (درست همانطور که اگر نصف يك پرتقال را بخوریم ، نمی‌توان از بقیه قسمتهای آن يك پرتقال كامل درست کرد) .

ولی ریاضی‌دان می‌تواند کره را به نحوی به چهار قسمت تقسیم کند که از دو قسمت آن بتوان کره کاملی با همان شعاع درست کرد ؛ بدون اینکه هیچ چیز به آنها اضافه کنیم ، تنها آنها را مثل جسمهای صلب حرکت می‌دهیم ، از دو قسمت دیگر هم می‌توان کره‌ای کاملاً شبیه



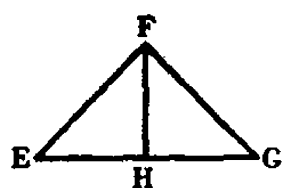
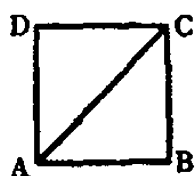
نردستی

اولی درست کرد ، به این ترتیب از يك كره ، دو كره مساوی با آن بدست می آید . با کمال تأسف ، این مسأله تنها به صورت نظری حل می شود ، والا می شد از يك سیب ، دو سیب از همان نوع بدست آورد ، سپس آنها را به چهار سیب ، بعد به هشت سیب و غیره تبدیل کرد ، البته حل عملی این مسأله هم ممکن نیست . زیرا با قانون بقای ماده متناقض است .

چنین تقسیمی از كره به چهار قسمت ، بر اساس اصل انتخاب قرار دارد . در باره نتیجه های عجیب تری که از اصل انتخاب بدست می آید ، دیگر در اینجا صحبتی نمی کنیم .

تقسیمهای محدود*

خواننده احتمالاً از هندسه مفهوم شکلهای هم ترکیب را به خاطر دارد . دو شکل X و Y را هم ترکیب گویند ، وقتی که بتوان آنها را به ترتیب به شکلهای $X_1, \dots, X_m$ و $Y_1, \dots, Y_n$ تقسیم کرد ، به نحوی که شکل X_1 با شکل Y_1 هم نهشت (قابل انطباق) ، شکل X_2 با شکل Y_2 و بالاخره شکل X_m با شکل Y_n هم نهشت باشد . مثلاً روشن است که مربع به ضلع a با مثلث متساوی الساقین و قائم الزاویه به قاعده a هم ترکیب است (شکل ۳۵) .



شکل ۳۵

ولی از نظرگاه نظریه مجموعه ها ، این تعریف کاملاً روشن نیست .

در حقیقت ، ضمن تقسیم شکل ، نقطه هایی را که روی خط تقسیم وجود دارند ، دوبار به حساب می آوریم ؛ از هر يك از این نقطه ها ، دو نقطه بدست می آید : روی هر قسمت ، يك نقطه .

و به این ترتیب ، تقسیم مربع $ABCD$ و مثلث EFG در شکل ۳۵ ، به مفهوم نظریه مجموعه‌ها ، به درد نمی‌خورد : بعد از تقسیم مثلث و قرار دادن قسمتهای آن در کنار هم تا به صورت مربع درآید ، نقطه‌های ضلعهای EF و FG روی هم قرار می‌گیرند و يك قطر AC از مربع را می‌دهند ، سپس نقطه‌های ارتفاع FH «به دو قسمت» می‌شوند و ضلعهای AB و CD از مربع را به وجود آورند .

بنابراین شکلهای هم ترکیب را در نظریه مجموعه‌ها ، به نحو دیگری باید تعریف کرد . شکلهای X و Y را هم ترکیب گوییم وقتی که بتوان آنها را به تعداد محدودی قسمتهای دوبه دو غیر متقاطع تقسیم کرد :

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m,$$

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$$

به نحوی که X_1 هم‌نهشت Y_1 ، X_2 هم‌نهشت Y_2 ، $\dots$ ، X_m هم‌نهشت Y_m باشد .

به نظر می‌رسد که از این نقطه نظر ، مربع $ABCD$ هم ترکیب با مثلث EFG است . ولی اثبات این حکم به اندازه کافی دشوار است . اگر خواننده علاقمند باشد این اثبات را بداند ، می‌تواند آنرا در کتاب «نظریه مجموعه‌ها» تألیف واتسلاو سرپینسکی پیدا کند^۱ .

س . باناخ و آ . تارسکی ثابت کردند که شرط لازم و کافی برای اینکه دو چند ضلعی مسطح به مفهوم نظریه مجموعه‌ها هم ترکیب باشند ، این است که مساحت‌های آنها مساوی باشد . طبعاً می‌توان انتظار داشت که این شرط برای چندوجهیها ، تساوی حجم آنها باشد . ولی این استنباط درست نیست . باناخ و تارسکی به کمک اصل انتخاب ثابت کردند که هر دو چندوجهی (محدود) به مفهوم نظریه مجموعه‌ها ، حتی وقتی که حجمهای مختلف دارند ، هم ترکیب‌اند . آنها ثابت کردند که به این مفهوم کره با

(۱) صفحه ۶۳ ترجمه فارسی کتاب سرپینسکی دیده شود .

مکعب ، و بطور کلی هر دو جسم محدود ، با یکدیگر هم ترکیب است .
متذکر می شویم که چه در حالت تقسیم کره (که قبلاً از آن صحبت کردیم)
و چه در حالت هم ترکیبی کره و مکعب ، از عمل انتخاب دلخواه استفاده
می شود . روش مشخص تقسیم را در اینجا نمی توان نشان داد . در این
تقسیم فرضی ، قسمت های « عجیبی » بدست می آید که حجم ندارند و
ریاضی دانها به آنها اندازه ناپذیر می گویند .

۳

تابعها و منحنیهای عجیب

یا

گشت و گذار در موزه ریاضی

پیشرفت مفهوم تابع

بسیاری از مفهومیهای ریاضی راه درازی را در جهت تکامل پیموده‌اند. يك مفهوم ریاضی ابتدا به عنوان تعمیم آگاهی‌هایی که از راه مشاهده و تجربه طولانی بدست آمده است، به وجود می‌آید. به تدریج از این آگاهی‌های مشاهده‌ای و از راه کنار گذاشتن حالت‌های خاص و اتفاقی، و توجه به حالت‌های کلی و همیشگی، تعریف دقیق ریاضی جان می‌گیرد. اغلب پیش می‌آید که این تعریف نه تنها برای چیزهایی که بررسی آنها مربوط به این تعریف است، کفایت می‌کند، بلکه شامل چیزهایی هم می‌شود که قبلاً حتی در باره آنها فکر هم نکرده بودند. بررسی این چیزهای تازه و عبور به انتزاع بالاتر، خود پایه‌ای برای پیش بردن تعریف نخستین و دقیق تر کردن آن می‌شود. همراه این پیشرفت، مفهوم ریاضی مورد نظر هدف وسیع‌تر و وسیع‌تری پیدا می‌کند. دایره گسترده‌تری از چیزها را دربر می‌گیرد، و کاربردهای گوناگون‌تری بدست می‌آورد. به عنوان نمونه، مفهوم عدد، از زمان‌های دور پیش از تاریخ، وقتی که تنها می‌توانستند «يك، دو، بسیار» را بشمارند، تا زمان ما، چه راه درازی را پیموده است! عددهای طبیعی، کسرها، عددهای منفی، عددهای مختلط، کواترنیونها، عددهای فوق مختلط و ... این را هم بگوییم که همیشه تعمیم يك مفهوم ریاضی، با خوشحالی همه ریاضی دانها روبرو نشده است. مثلاً نه تنها عددهای مختلط، بلکه حتی عددهای منفی هم تا مدت‌ها، مورد تأیید بسیاری از دانشمندان نبوده است.

مفهوم تابع هم از راه پرفراز و نشیبی گذشته است . فکر رابطه بین چند کمیت ، ظاهراً از دانش یونان باستان سر در آورده است . ولی کمیتها در آنجا تنها سرشت هندسی داشته اند . حتی نیوتون ، که یکی از پایه گذاران آنالیز ریاضی است ، برای بررسی کمیتهای مربوط به هم ، از زبان هندسی استفاده می کند . گرچه فرما و دکارت هم از مفهوم تابع استفاده می کردند ، ولی خود اصطلاح « تابع » در سال ۱۶۹۴ و در نوشته های لایب نیتس دانشمند آلمانی ، که همزمان با نیوتون در به وجود آوردن آنالیز ریاضی تلاش می کرد ، وارد شده است . ولی مفهوم تابع برای لایب نیتس ، معنای خیلی تنگ و محدودی داشت ، و تنها مربوط به بعضی پاره خطها می شد که وضع آنها ، به جای نقطه روی منحنی ارتباط داشت : تحت مماس ، تحت قائم ، شعاع انحناء و غیره . به این ترتیب لایب نیتس هم در موضع هندسی باقی مانده بود ، تا اینکه ای . برنولی ، شاگرد لایب نیتس در سال ۱۷۱۸ ، تعریف تابع را از قید صورتهای هندسی آن آزاد کرد : « تابع يك مقدار متغیر ، به کمیتی گفته می شود که به ترتیبی از این مقدار متغیر و مقادیر ثابت به وجود آمده باشد » .

گام بعدی را در پیشرفت مفهوم تابع ، لئونارد اولر ، عضو آکادمی پترزبورگ و شاگرد نابغه ای . برنولی ، برداشت . او در کتاب خود به نام « حساب دیفرانسیل » ، تابع را چنین تعریف می کند : « مقادیری را تابع گویند که وابسته به مقادیر دیگری باشند ، به نحوی که با تغییر دومینها ، اولیها هم تغییر کنند » .

ولی مفهوم تابع برای اولر و ریاضی دانهای هم زمان او ، مربوط به امکان بیان تابع به وسیله يك دستور بود . از نظر ریاضی دانهای سده هیجدهم ، نوشته .

$$y = \begin{cases} x & (x < 0) \\ x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

دو تابع را تعریف می کرد (و نه يك تابع را) .

به زودی معلوم شد که مطلب به این سادگیها نیست . د . پرنولی ضمن حل مسأله مربوط به نوسانهای سیم ، به جوابی به صورت يك دشته مثلثاتی رسید . ما در اینجا در باره چگونگی این رابطه صحبت نمی کنیم ، تنها به این نکته اشاره می کنیم که شکل سیم به كمك يك دستور داده می شد (اگرچه شامل بی نهایت جمله بود) .

همین مسأله نوسانهای سیم را ، دالامبر دانشمند فرانسوی هم حل کرد . جواب دالامبر بکلی به صورتی غیر از جواب پرنولی بود و به ازای آوندهای مختلف (آوند = آرگومان) ، دستورهای متفاوتی می داد .

ظاهراً در برابر ریاضیات سده هیجدهم ، تناقضی حل نشدنی قرار گرفته بود : برای يك مسأله دو جواب بدست آمده بود ؛ ضمناً یکی از این جوابها برای همه مقادیر مختلف آوند با يك دستور بیان می شد ، درحالی که دیگری دستورهای مختلفی را در مقابل ما می گذاشت . به خاطر این وضع ، جواب د . پرنولی مورد تردید قرار گرفت : گمان کردند که او تمام جوابهای مسأله را پیدا نکرده است ، بلکه تنها به جوابهایی دست یافته است که به وسیله يك دستور بیان می شوند . بحث و مشاجره شدیدی به وجود آمد ، که در آن همه ریاضی دانهای بزرگ سده هیجدهم - اولر ، دالامبر و دیگران - شرکت داشتند .

در واقع بحث بر سر مفهوم تابع ، در باره رابطه های تابعی و در باره امکان بیان این رابطه به وسیله دستور بود . حل قطعی این مسأله در ابتدای سده نوزدهم و به وسیله ژ . فوریه ، ریاضی دان فرانسوی به دست آمد . فوریه ثابت کرد ، مجموع رشته بی پایانی که از تابعهای مثلثاتی تشکیل شده است ، ممکن است در فاصله های مختلف ، با دستورهای متفاوت بیان شود . فوریه ، بعد از اثبات این حکم ، تعریف تازه ای از تابع داد و روی این مطلب تکیه کرد که : مهم این است که مقدار تابع داده

شده باشد، و اینکه این مقدار به وسیله يك دستور مشخص شده باشد یا نه، اهمیتی ندارد.

نتیجه گیری فوری به وسیله دیریکله ریاضی دان آلمانی دقیق تر شد. او ثابت کرد مجموع رشته مثلثاتی می تواند هر منحنی دلخواهی را نمایش دهد، تنها باید تعداد ماکزیممها و مینیممها در این منحنی محدود باشد و منحنی تا ارتفاع بی نهایت بالا نرود. دیریکله، تعریف فوری را برای تابع دقیق تر کرد و آنرا به صورتی درآورد که امروز هم مورد استفاده است (قبل از آن هم لاکروا، لپاچوسکی و بعضی ریاضی دانهای دیگر، تعریفی نزدیک به تعریف دیریکله برای تابع داده بودند). دیریکله برای تابع این تعریف را می آورد: «مقدار متغیر y را تابع مقدار متغیر x گوئیم، وقتی که هر مقدار x متناظر با يك مقدار معین و منحصر مقدار y باشد» بعدها به جمله «هر مقدار x »، جمله «که متعلق به فلان مجموعه است» را اضافه کردند (زیرا لزومی ندارد که تابع برای همه مقادیر x ، معین باشد).

این تعریف به اندازه کافی کلی بود، در آن هیچ صحبتی از این نشده است که تابع باید در فاصله ای که معین است، به وسیله يك دستور داده شود. حتی از این هم بالاتر، تابع می تواند با کلمه ها معین شود و اصلاً دستوری برای آن داده نشود. مثلاً خود دیریکله، این تابع را در نظر می گیرد:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{وقتی که } x \text{ عددی گنگ است} \\ 1, & \text{وقتی که } x \text{ عددی گویا است} \end{cases}$$

از نظرگاه ریاضی دانهای سده هیجدهم، این تعریف هیچ تابعی را نمی دهد، زیرا دستوری وجود ندارد که به کمک آن بتوان تابع دیریکله را محاسبه کرد. با وجود این، چنین تعریفی تابع را کاملاً مشخص می کند. از این تعریف کاملاً روشن است که مثلاً

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 1, \quad f(\sqrt{2}) = 0$$

در واقع ، تعریف دیریکله (با اضافه‌ای که به آن اشاره کردیم) ، برای تابعهای عددی از آوندهای عددی ، پایان کار بود . پیشرفت بعدی مربوط به بررسی تابعهایی بود که روی مجموعه‌های دلخواه داده شده باشد و همچنین مقادیری که روی مجموعه‌های دلخواه قبول کند . مثلاً^۱ فرض کنید دو مجموعه A و B داده شده باشد ، و فرض کنید هر عضو a از مجموعه A متناظر با عضو b از مجموعه B باشد. در این صورت گویند تابعی روی مجموعه A با مقادیری روی مجموعه B داده شده است . مفهوم تابع ، در تعریف کلی‌تر خود با مفهومهای تناظر ، نگاشت و تبدیل یکی شده است.

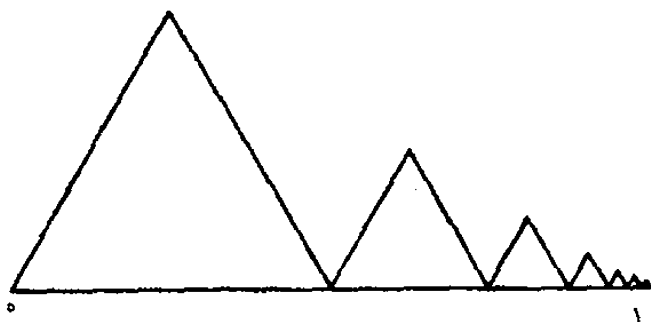
از این نظرگاه ، مثلاً^۲ مساحت مثلث ، تابعی است که روی مجموعه همه مثلثها داده شده و مقادیری روی مجموعه عددهای مثبت قبول می‌کند. همچنین دایره محاط در مثلث ، تابعی است روی مجموعه همه مثلثها با مقادیری روی مجموعه دایره‌ها. ولی ما در اینجا روی این نقطه نظر کلی نمی‌ایستیم و تنها به تابعهایی می‌پردازیم که روی مجموعه‌های عددی داده شده‌اند و مقادیر عددی را قبول می‌کنند .

جن از شیشه آزاد می‌شود

تعریف دیریکله این امکان را به وجود آورد که تابعهایی با عجیب‌ترین خاصیتها، ساخته شود. اگر پیش از آن ، برای ساختن تابعی با خاصیتهای مورد نظر، لازم بود دستورهای گوناگونی را به هم ترکیب کنند ، حالا دیگر، کار خیلی ساده شده بود ، و امکان بررسی تابعهای مختلف، بدون اینکه درباره وجود يك دستور یگانه برای آن فکر کنیم، پیدا شد . و از نیمه سده گذشته ، تابعهایی ساخته شد که خاصیتهای آن

بکلی با خاصیت‌های تابع‌های معمولی ، متفاوت بود . بدون شک ، خود دیریکله هم گمان نمی‌برد که چه نتیجه‌های عجیبی از کار او بدست می‌آید . خود تابع دیریکله ، که ما پیش از این بادی از آن کردیم ، به اندازه کافی غیرعادی است . در هر پاره خط کوچک محور طول ، بی‌نهایت عددگویا و بی‌نهایت عددگنگ وجود دارد . ولی تابع دیریکله برای عددهای گویا ، مساوی واحد و برای عددهای گنگ ، مساوی صفر است . بنابراین ، وقتی که x روی محور طول حرکت می‌کند ، مقدار تابع مرتباً از 0 به 1 و از 1 به 0 می‌پرد . نمایش تغییرات این تابع را نمی‌توان رسم کرد ، زیرا این تابع در تمام نقطه‌های خود ناپیوسته است .

ولی در میان تابع‌های پیوسته هم ، تابع‌هایی با خاصیت‌های عجیب پیدا می‌شود . مثلاً ، آیا می‌توان تابع پیوسته‌ای پیدا کرد که در يك فاصله محدود ، بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد ؟ در نظر اول گمان می‌رود که چنین چیزی ممکن نیست . مگر نه این است که تابع باید بتواند از نقطه ماکزیمم به طرف نقطه می‌نیمم پایین برود و سپس از نقطه می‌نیمم به طرف نقطه ماکزیمم بالا برود و غیره . و چگونه می‌تواند این عمل را در يك فاصله محدود بی‌نهایت بار انجام دهد ؟ با وجود این ، چنین تابع عجیبی وجود دارد و ضمناً ساختن آن هم خیلی ساده است .



شکل ۳۶

این تابع را در فاصله $[0, 1]$ می‌سازیم . برای این منظور ، پاره‌خط را نصف می‌کنیم و روی نیمه چپ آن ، مثلث متساوی‌الاضلاعی

بنا می‌کنیم . حالا دوباره نیمه باقیمانده طرف راست را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و روی قطعه $[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$ مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم . عمل مذکور را بی‌نهایت بار تکرار می‌کنیم ، برای ما «سلسله جبالی» بدست می‌آید که دارای بی‌نهایت «قله» است و مرتباً به طرف نقطه ۱ پایین می‌آید (شکل ۳۶) . خط شکسته‌ای را که به این ترتیب بدست می‌آید ، به عنوان نمایش تغییرات تابع $f(x)$ می‌گیریم . در این صورت ، تابع برای هر نقطه از پاره خط $[0, 1]$ ، بجز نقطه انتهایی سمت راست ، معین است . در این نقطه هم فرض می‌کنیم :

$$f(1) = 0 .$$

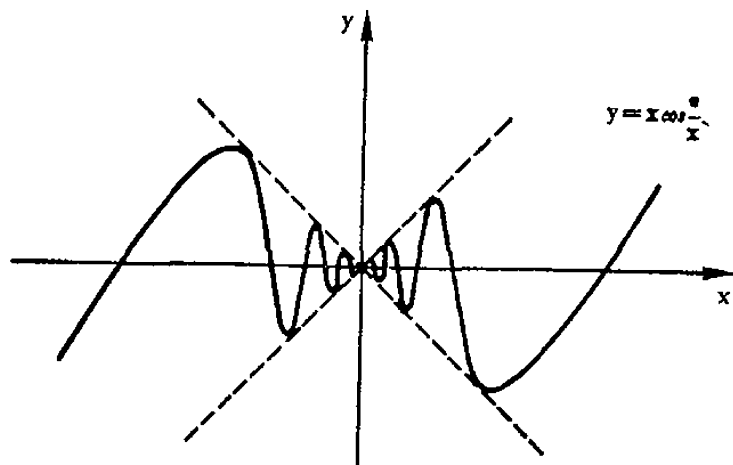
از آنجا که با نزدیک شدن به نقطه ۱ ، ارتفاع رأسها به سمت صفر میل می‌کند ، تابعی که بدست آورده‌ایم در تمام نقطه‌های فاصله $[0, 1]$ پیوسته ، و ضمناً تعداد ماکزیممها و می‌نیممها در این فاصله بی‌نهایت است .

ریاضی‌دان سده هیجدهم ، برای اینکه چنین تابعی را بسازد ، مجبور بود تابعهای مختلف زیادی را با هم ترکیب کند ، بدون اینکه به این مطلب پی برده باشد که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

در فاصله $[0, 1]$ دارای بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم است (شکل ۳۷ را ببینید) .

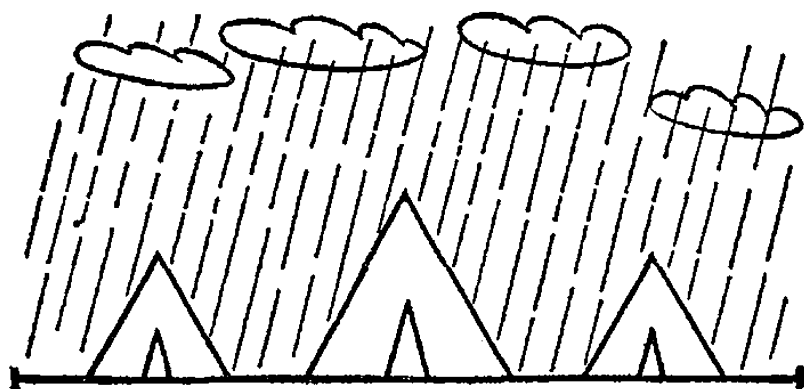
ولی تابعی که بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم دارد ، تازه آغاز پیشامدهای شگفتی‌آور برای ریاضی‌دانها بود . این آغاز آزاد شدن جن از شیشه بود .



شکل ۳۷

نقطه‌های نمناك

در تابعهائی که هم‌اکنون نام بردیم، تنه‌ها يك نقطه (یعنی نقطه ۱) وجود دارد که در کنار آن بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم است. حالا تابع دیگری می‌سازیم که در آن، اینگونه نقطه‌ها، خیلی زیاد باشد.



باران می‌بارد

فرض کنیم روی پاره خط $[۱, ۰]$ از محور طول از بالا باران ببارد. برای حفظ آن از باران به این ترتیب عمل می‌کنیم، پاره خط $[۱, ۰]$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و روی قسمت

وسط ، چادری به شکل مثلث متساوی الاضلاع قرار می دهیم . این چادر همه نقطه های قسمت وسط را از باران حفظ می کند (بجز دو انتهای این قسمت ، یعنی نقطه های $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$) . حالا هر کدام از دو قسمت دیگر را دوباره به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم و هریک از قسمت های وسط را با چادری به همین شکل می پوشانیم (البته ضلع مثلث های جدید کوچکتر از ضلع مثلث قبلی است) . برای ما خطی بدست می آید که در شکل ۳۸ نشان داده شده است . در مرحله سوم ، چهار چادر و سپس هشت چادر و غیره می سازیم .

شکل ۳۸

پرسشی پیش می‌آید، آیا همه نقطه‌های پاره خط به وسیله این خط شکسته دندانه‌ای از باران محفوظ می‌ماند، یا نقطه‌هایی باقی می‌ماند که از باران خیس می‌شود؟ بعضی از این نقطه‌های «نمناک» به سادگی بدست می‌آید، آنها دو انتهای پاره خطهایی هستند که با چادر پوشیده شده است (یعنی نقطه‌هایی مثل $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{2}{9}$ ، $\frac{7}{9}$ ، $\frac{8}{9}$ و غیره). همه این نقطه‌ها با ساختن چادرهای مربوطه خود بی‌حفاظ می‌ماند و چادرهای بعدی هم آنها را نمی‌پوشاند. به سادگی معلوم می‌شود که تعداد اینگونه نقطه‌ها بی‌نهایت است، منتهی مجموعه‌ای شمارا تشکیل می‌دهند.

ولی معلوم شد که علاوه بر این مجموعه شمارا از نقطه‌های «نمناک»، مجموعه‌ای با قوت متصله از این نقطه‌ها وجود دارد. برای شرح این نقطه‌ها، بهتر است در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ کار کنیم.

می دانیم که این دستگاه هم شبیه دستگاه عدد شماری به مبنای 10 (دستگاه معمولی) است ، منتهی اگر در دستگاه به مبنای 10 ، واحد هر رقم 10 برابر واحد رقم قبل از خود است ، در دستگاه عدد شماری به مبنای 3 ، واحد هر رقم 3 برابر واحد رقم قبلی است . به همین مناسبت ، برای نوشتن عددها در دستگاه عدد شماری به مبنای 3 ، به جای ده رقم ، تنها به سه رقم 0 ، 1 و 2 نیاز داریم .

به سادگی می توان هر عددی را که در دستگاه عدد شماری به مبنای 3 نوشته شده است ، به مبنای ده برد . مثلاً عددی که در دستگاه عدد شماری به مبنای 3 به صورت :

$$0/02020202\dots$$

نوشته شده باشد ، در دستگاه عدد شماری به مبنای 10 به صورت مجموع بی نهایت جمله از تصاعد هندسی زیر در می آید :

$$\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots$$

این مجموع برابر $\frac{1}{4}$ است و بنابراین :

$$\frac{1}{4} = 0/02020202\dots$$

حالا می توانیم با دقت بگوییم ، بعد از آنکه همه چادرهای حفاظ را ساختیم ، چه نقطه هایی ، نمناك باقی می ماند . چادر اول ، نقطه هایی که بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ واقع است ، محفوظ می کند ، ولی همه این نقطه ها ، آنهایی هستند که در دستگاه عدد شماری به مبنای 3 ، به این صورت نوشته می شوند :

$$0/1\dots$$

نقطه ها به معنی رقمهای دلخواهی از 0 ، 1 و 2 هستند (درست

مثل حالت دستگاه دهدهی ، که نقطه های بین $\frac{1}{10}$ و $\frac{2}{10}$ با رقم 1 بعد از

ممیز شروع می‌شوند ، یعنی به صورت $۰/۱\dots$ هستند .

بعد از نخستین گام ، نقطه‌های نمناکی که باقی می‌ماند ، در دستگاه عدد شماری به مبنای سه ، به صورت :

$$۰/۰\dots$$

یا به صورت

$$۰/۲\dots$$

خواهند بود .

به همین ترتیب ثابت می‌شود که بعد از برپا داشتن دو چادر ، در گام دوم ، نقطه‌های باقی‌مانده نمناک ، در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ ، به صورت یکی از چهار حالت زیر شروع می‌شوند :

$$۰/۰۰\dots$$

$$۰/۰۲\dots$$

$$۰/۲۰\dots$$

$$۰/۲۲\dots$$

به این ترتیب با هر گام ، نقطه‌هایی را از باران حفظ می‌کنیم که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ ، با رقمهای مساوی واحد نوشته می‌شود . در نتیجه در انتهای کار ، نقطه‌هایی در معرض ریزش باران باقی می‌مانند که در نمایش آنها در دستگاه عدد شماری به مبنای ۳ می‌توان بدون استفاده از رقم ۱ (یعنی تنها با رقمهای ۰ و ۲) نوشت . مثلاً به عنوان نقطه‌های نمناک

$$\frac{1}{4} = ۰/۰۲۰۲۰۲\dots$$

یا :

$$\frac{3}{4} = ۰/۲۰۲۰۲\dots$$

و غیره باقی می ماند .

و حالا معلوم می شود که چرا مجموعه نقطه های «نمناك» قوت متصله دارد . این مجموعه را می توان در تناظر يك به يك با مجموعه تلگرامهای بی نهایت قرارداد (صفحه ۱۱۴ را ببینید) . برای این منظور ، کافی است هر نقطه به صورت :

$$0/202202000...$$

را متناظر با تلگرامی گرفت که در آن ۰ و ۲ به ترتیب به نقطه و خط تبدیل شده است . به این ترتیب عددهای مختلف ، متناظر با تلگرامهای مختلف خواهد شد . می دانیم که مجموعه این تلگرامها ، قوت متصله دارد ، بنابراین مجموعه نقطه های نمناك هم قوت متصله خواهند داشت . مجموعه نقطه هایی را که ما «نمناك» نامیدیم ، برای نخستین بار کانتور ساخت و به همین مناسبت به آن مجموعه کانتور گویند . از ساختمان چادرها معلوم می شود که در نزدیکی هر نقطه از مجموعه کانتور ، بی نهایت ماکزیمم و می نیمم به شکل دندانها وجود دارد .

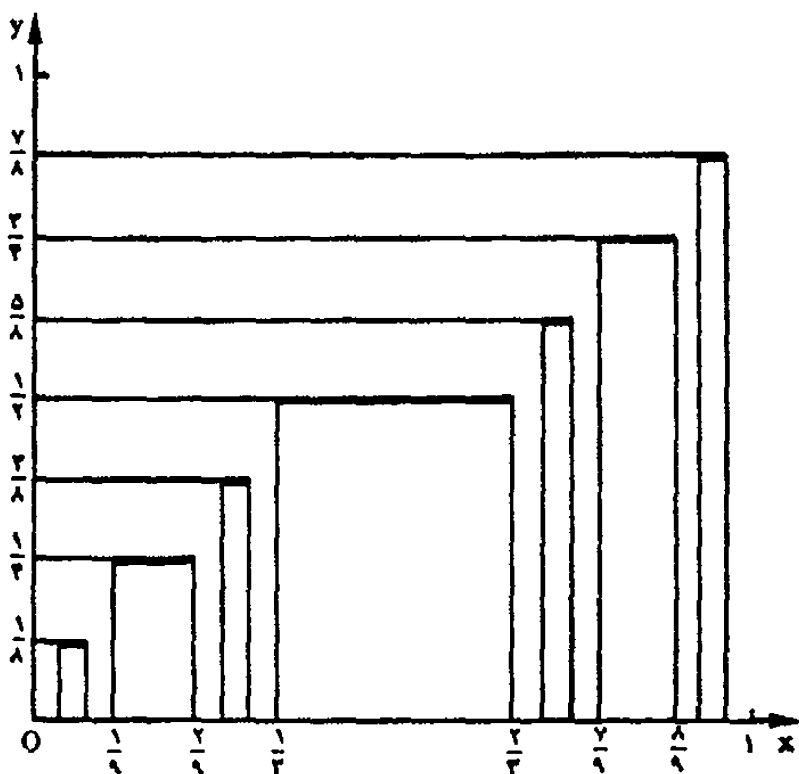
پله کان عجیب

تابع جالب دیگری وجود دارد که به همین مجموعه کانتور مربوط می شود . این تابع به این ترتیب ساخته می شود . دوباره پاره خط $[0, 1]$ را به سه قسمت مساوی تقسیم و فرض می کنیم که تابع ما برای همه نقطه های قسمت وسط ، مساوی $\frac{1}{4}$ باشد . بعد قسمت سمت چپ و قسمت سمت راست را باز به سه قسمت مساوی تقسیم و فرض می کنیم که تابع ما در فاصله $\frac{1}{9}$ تا $\frac{2}{9}$ مساوی $\frac{1}{4}$ و در فاصله $\frac{7}{9}$ تا $\frac{8}{9}$ مساوی $\frac{3}{4}$ باشد . حالا چهار پاره خط برای ما باقی می ماند که روی آنها ، تابع ما هنوز معین نیست :

$$[0, \frac{1}{9}], [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}], [\frac{3}{9}, \frac{4}{9}], [\frac{4}{9}, \frac{5}{9}], [\frac{5}{9}, \frac{6}{9}], [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}], [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$$

هر يك از اين فاصله‌ها را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و تابع را روی قسمت وسط هر کدام از آنها به ترتیب مساوی $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$ می‌گیریم.

با ادامه این عمل، تابعی بدست می‌آوریم که برای تمام نقطه‌های «خشك»، یعنی نقطه‌هایی که متعلق به مجموعه کانتور، نیستند، معین است. به سادگی می‌توان تابع را در این نقطه‌ها هم تعریف کرد، به نحوی که بعد از آن تابع ما پیوسته و غیر نزولی باشد. نمایش تغییرات تابعی که بدست می‌آید، به تقریب در شکل ۳۹ نشان داده شده است. این



شکل ۳۹

نمایش تغییرات به شکل پله‌کانی است که بی‌نهایت پله دارد (روی شکل همه پله‌ها نشان داده نشده است) .

بعد از آنکه با نمایش تغییرات تابعی آشنا شده‌ایم که دارای بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم است، پله‌کانی با بی‌نهایت پله، چه تعجبی دارد؟ ولی شگفتی جای دیگری است. طول کلی همه این پله‌ها را بدست می‌آوریم .

طول پله اول مساوی $\frac{1}{3}$ است (منظور اولین پله‌ای است که ضمن ساختن تابع بدست آوردیم) ، دو پله بعدی هر کدام به طول $\frac{2}{9}$ و چهار پله بعد از آن ، هر کدام به طول $\frac{1}{27}$ است و غیره . بنابراین مجموع طولهای همه پله‌ها به صورت مجموع جمله‌های يك تصاعد هندسی بیان می‌شود :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

که حاصل آن برابر است با:

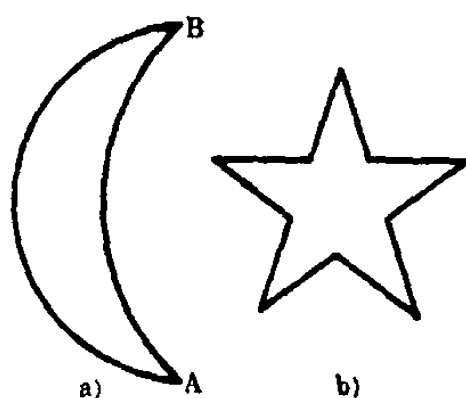
$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

یعنی طول کلی همه پله‌ها برابر است با ۱ . ولی در این تابع پله‌کانی ، مطلقاً همه مسیرهایی که از روی نقطه‌های مجموعه کانتور عبور می‌کند ، به حساب نیامده است . سهم این مجموعه «خیلی کم» باقی مانده است، اگرچه این مجموعه قوت متصله دارد ، ولی طولش برابر صفر می‌شود! (طول تمام پاره خط $[0, 1]$ مساوی ۱ است و طول کلی پله‌ها هم مساوی ۱ شده است ، به نحوی که سهم مجموعه کانتور،

تنها طولی برابر صفر باقی مانده است). به این ترتیب، تابع ما توانست تا ۱ بالا برود، اگر چه تنها در زمينه مجموعه‌ای به طول صفر رشد می‌کند و هیچ شکافی هم در آن وجود ندارد! آیا این از شگفتیها نیست؟

منحنی خاردار

در جریان صدها سال، ریاضی‌دانها تنها با منحنیهایی سروکار داشتند که تقریباً در هر نقطه آنها می‌شد مماسی بر منحنی رسم کرد. اگر هم به حالت استثنایی برمی‌خوردند، تنها مربوط به چند نقطه بود. در این نقطه‌ها، مثل این بود که منحنی شکسته است و به همین مناسبت هم آنها را نقطه‌های شکستگی می‌گفتند. منحنی که در شکل ۴۰ - a نشان داده شده است، دو شکستگی، و در شکل ۴۰ - b ده نقطه شکستگی دارد.

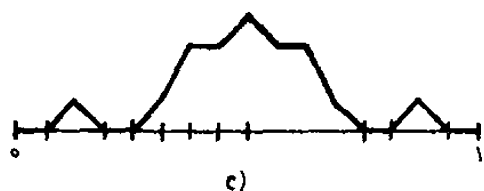
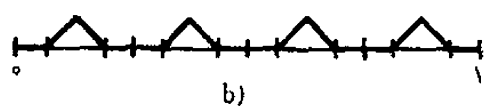
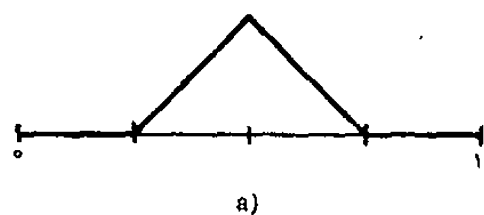


شکل ۴۰

ولی منحنیهایی که ما قبلاً ساختیم، بی‌نهایت نقطه شکستگی دارند: در شکل ۳۶ مجموعه نامتناهی ولی شمارا از این نقطه‌ها، و در شکل ۳۸ مجموعه نامتناهی با قوت متصله از این نقطه‌ها وجود دارد. این منحنی در تمام نقطه‌های مجموعه کانتور و علاوه بر آن در رأسهای مثلثها، شکستگی دارد. با وجود این، حتی شکستگیهای منحنی شکل ۳۸، در مقایسه مجموعه نقطه‌هایی که طول آن صفر است، «ناچیز» به نظر می‌رسد.

تا مدت‌ها، ریاضی‌دانها باور نمی‌کردند که ممکن است منحنی پیوسته‌ای وجود داشته باشد که تمام آن از دندانها، شکستگیها و

خارها تشکیل شده باشد. ریاضی دانها تا چه اندازه دچار شگفتی شدند، وقتی توانستند این منحنی را بسازند، و بالاتر از آن تابعی را بدست آورند که نمایش تغییرات آن چنین حصاری از خارها باشد. نخستین کسی که به این کار موفق شد، بولتسانو ریاضی دان چک بود. ولی نوشته او چاپ نشد و نخستین نمونه از این نوع به وسیله ک. وایشتراس ریاضی دان آلمانی منتشر شد. طرح نمونه وایشتراس خیلی دشوار است. همینقدر می گوئیم که او براساس نظریه رشته های مثلثاتی، این نمونه را ساخته بود. ولی نمونه بولتسانو خیلی ساده است و منحنی را که ما قبلاً ساخته ایم به خاطر می آورد.



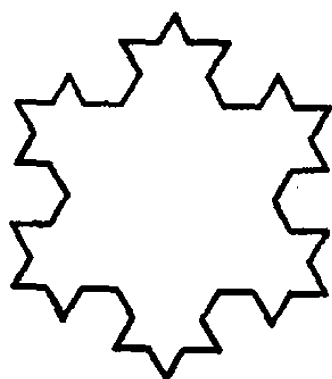
شکل ۴۱

در اینجا مثال بولتسانو را با کمی تغییر می آوریم. پاره خط $[0, 1]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم و روی دو قسمت وسط، مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی می سازیم (شکل ۴۱-ا). شکلی که بدست می آید، نمایش تغییرات تابعی است که ما آنرا به $y = f_1(x)$ نشان می دهیم.

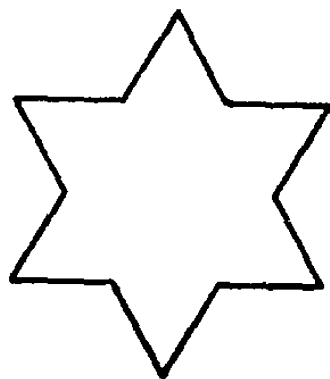
حالا هر يك از چهار قسمت را باز هم به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم و متناظر با آنها چهار مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می سازیم (شکل ۴۱-ب). نمایش تغییرات تابع دوم $y = f_2(x)$ بدست می آید. اگر این دو تابع را جمع کنیم، نمایش تغییرات مجموع $y = f_1(x) + f_2(x)$ بدست می آید که در شکل ۴۱-ج نشان داده شده

است. دیده می‌شود که منحنی بدست آمده دیگر شکستگیهای زیادی دارد. در قدم بعدی دوباره هریک از قسمتها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و ۱۶ مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می‌سازیم و تابع متناظر آن $y = f_2(x)$ را به تابع $y = f_1(x) + f_2(x)$ اضافه می‌کنیم. با ادامه این روش، خط شکسته‌ای با تعداد خیلی خیلی زیاد شکستگی بدست می‌آید. در حالت حدی، منحنی بدست می‌آید که در هر نقطه خود شکستگی دارد و حتی در يك نقطه آن هم نمی‌توان مماسی بر منحنی رسم کرد.

نمونه دیگری از منحنیهایی که در هیچیک از نقطه‌های خود مماس ندارد، به وسیله وان - در - وادن ریاضی‌دان هلندی عرضه شد. او مثلث متساوی الاضلاعی انتخاب کرد، هریک از ضلعهای آنرا به سه قسمت مساوی تقسیم کرد و روی قسمتهای وسط مثلثهای متساوی-الاضلاع جدیدی، در خارج مثلث اصلی، ساخت. برای او يك ستاره



b)



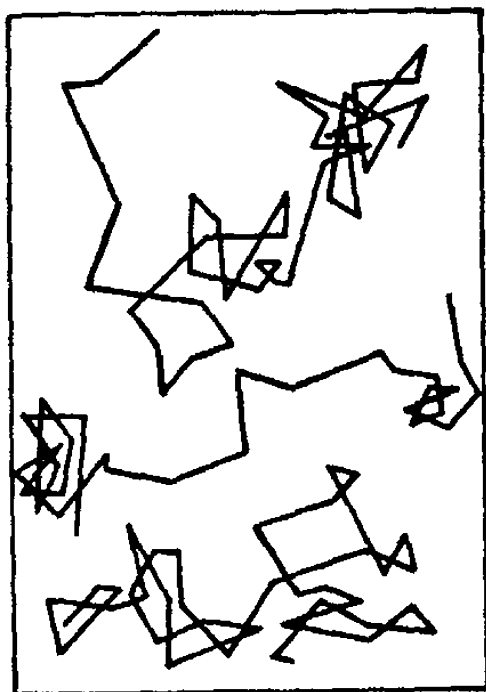
a)

شکل ۴۲

شش پر بدست آمد (شکل ۴۲ - a). حالا دوباره هریک از دوازده ضلع این ستاره را به سه قسمت مساوی تقسیم کرد و روی قسمتهای وسط هر ضلع، مثلث متساوی الاضلاعی بنا کرد و شکل «پرخاری» را که در شکل ۴۲ - b دیده می‌شود، پیدا کرد. پس از آنکه بی‌نهایت مرتبه این روش

را ادامه دهیم ، منحنی بدست می آید که در هر نقطه آن شکستگی وجود دارد .

ریاضی دانها تابعهای پیوسته زیادی ساختند ، که در هیچ نقطه از منحنی آنها نمی شد مماس رسم کرد و شروع به بررسی خاصیتهای آنها کردند . این خاصیتها بکلی با خاصیتهای منحنی-های هموار «سربه راهی» که تا آن زمان سروکار داشتند ، متفاوت بود . به همین مناسبت ، ریاضی دانهایی که کار سنتی خود را بر مماس گذاشته بودند ، با شگفتی به این



شکل ۴۳

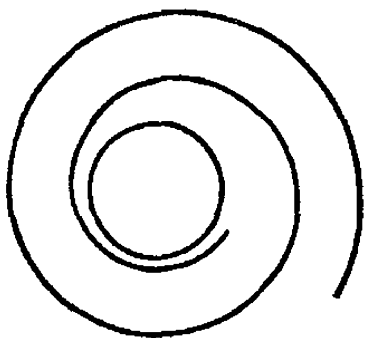
تابعها نگاه می کردند . شارل هریت نماینده مشهور آنالیز کلاسیک به دوست خود ستیل قیس ، ریاضی دان هلندی ، چنین می نویسد :
«من با هراس از این بلبه ای که دامنگیر تابعهای پیوسته شده است ، رو برمی گردانم ، تابعهای پیوسته ای که حتی در یکی از نقطه های خود ، مشتق ندارند» (یعنی آنطور که ما گفتیم ، همه جا و در همه نقطه ها ، شکستگی دارند) .

آ. پوانکاره ، دانشمند معروف فرانسوی نوشت :
«زمانی برای پیدا کردن تابعهای جدید ، يك هدف عملی در نظر بود ، ولی حالا دنبال تابعهای خاصی می روند تا عدم کفایت بررسمیهای پدران ما را ثابت کنند ؛ و جز این هیچ نتیجه دیگری از این بابت عاید

ولی پیشرفت بعدی دانش نشان داد که حق با پوانکاره نیست . در فیزیک به منحنیهایی برمی‌خوریم که منحنیهای خاردار وان - در - وادن و دیگران را به‌خاطر می‌آورد . مثلاً مسیر جزءهایی که در حرکت براونی شرکت دارند (تحت تأثیر ضربه مولکولها)، از این قبیل است . ف. پهن، دانشمند فرانسوی ، حرکت این جزءها را رسم کرده است . او جای هر جزء را دقیقه به دقیقه مشاهده کرد و نقطه‌هایی را که به این ترتیب بدست آورد ، با خط راست به هم پیوست . در نتیجه خطهای شکسته پیچ در پیچی پیدا کرد که نمونه‌هایی از آنها را در شکل ۴۳ نشان داده‌ایم . ولی نباید تصور کرد که هر جزء در فاصله دو لحظه مشاهده روی خط راست حرکت می‌کند . اگر پهن به جای هر دقیقه، هر ثانیه‌ای یکبار جای جزءها را مطالعه می‌کرد ، هر کدام از این پاره خطهای راست ، به صورت خط شکسته‌ای شبیه آنچه که در شکل ۴۳ می‌بینیم ، در می‌آمد . و هر چه فاصله زمانی بین دو مشاهده متوالی را کوچکتر کنیم ، خط شکسته مفروض پیچیده‌تر و شکسته‌تر می‌شود . ن. وینر ، ریاضی‌دان امریکایی ، ثابت کرده است که حرکت جزءهای براونی بقدری کند است که می‌توان از اینرسی آن صرف‌نظر کرد ، این حرکت روی منحنی انجام می‌گیرد که در هیچ نقطه آن مماسی وجود ندارد .

منحنی بسته با طول بی‌نهایت

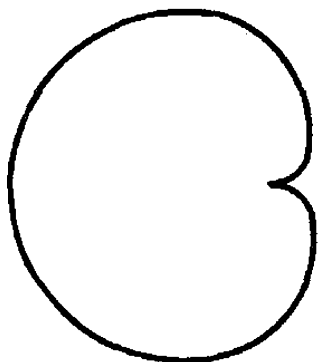
ما اغلب به منحنیهایی که طول بی‌نهایت دارند برمی‌خوریم : خط راست ، سهمی ، هذلولی و غیره . همه این منحنیها تا بی‌نهایت ادامه دارند و بنابراین بی‌نهایت بودن طول آنها، تعجبی ندارد . با وجود این به آسانی می‌توان منحنیهایی ساخت که تمام آن در قسمت محدودی از صفحه واقع باشد ، ولی طول بی‌نهایت داشته باشد . برای این منظور باید



شکل ۴۴

دایره‌ای انتخاب کرد و دور آن مارپیچی را بی‌نهایت مرتبه پیچاند (شکل ۴۴). چون تعداد دورها بی‌نهایت است و طول هر دور هم بیشتر از طول دایره است، بنابراین طول تمام مارپیچ، بی‌نهایت می‌شود.

ولی آیا منحنی بسته، با طول بی‌نهایت وجود دارد؟ منحنیهای بسته معمولی، مثل دایره، بیضی، کاردیوئید (شکل ۴۵) و غیره، طولی محدود دارند. ولی طول منحنی خاردار وان-دد-وادن، بی‌نهایت است.



شکل ۴۵

در واقع، اگر محیط مثلث اصلی را مساوی ۳ بگیریم، بعد از برداشتن نخستین گام، شکل ستاره‌ای شش‌پری بدست می‌آید که به سادگی محیط آن قابل

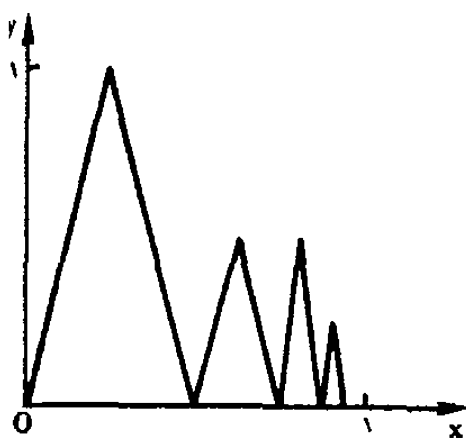
محاسبه است، این محیط برابر است با ۴. در گام دوم، خط شکسته بسته‌ای بدست می‌آید که از ۶۴ پاره خط درست شده و طول هر کدام از آنها مساوی $\frac{1}{4}$ است و بنابراین محیط آن مساوی $\frac{64}{4}$ می‌شود. سپس

خط شکسته بسته‌ای با محیط مساوی $\frac{256}{27}$ بدست می‌آید و غیره. بطور

کلی، بعد از گام n ام، خط شکسته بسته‌ای با محیطی مساوی $3 \times (\frac{4}{3})^n$ بدست می‌آید. ولی این مقدار، با بزرگ شدن n ، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین طول منحنی وان-دد-وادن مساوی بی‌نهایت

است .

منحنیهای دیگری هم با طول بی‌نهایت وجود دارد. مثلاً منحنی را به این ترتیب می‌سازیم. پاره خط $[0, 1]$ را نصف می‌کنیم و روی نیمه چپ آن مثلث متساوی‌الساقینی به ارتفاع ۱ می‌سازیم: سپس پاره خط $[\frac{1}{4}, 1]$ را نصف می‌کنیم و بعد روی نیمه چپ آن



شکل ۴۶

$[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ، مثلث متساوی‌الساقینی به ارتفاع $\frac{1}{4}$ می‌سازیم. مثلث متساوی‌الساقین بعدی را روی پاره خط $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}]$ و به همان ارتفاع $\frac{1}{4}$ می‌سازیم؛ مثلث چهارم بعد از آنرا با ارتفاع مساوی $\frac{1}{4}$ می‌سازیم و غیره (شکل ۴۶). در اینجا هم سلسله جبال نزولی، شبیه شکل ۳۶ بدست می‌آید، ولی در اینجا باکندی نزول می‌کند. روشن است که طول هر ساق مثلث اول بزرگتر از ۱، ساق مثلث دوم و سوم بزرگتر از $\frac{1}{4}$ ، ساق مثلثهای چهارم، پنجم، ششم، و هفتم بزرگتر از $\frac{1}{4}$ است و غیره. (طول ساق همیشه از ارتفاع مثلث بیشتر است.) بنابراین طول تمام خط شکسته، از مجموع رشته بی‌نهایت زیر کمتر نیست:

$$2 + (\frac{2}{4} + \frac{2}{4}) + (\frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}) + \dots$$

ولی مجموع عددهای داخل هر مربع برابر است با ۲، و تعداد پرانتزها

هم مساوی بی نهایت است . بنابراین مجموع این رشته مساوی بی نهایت می شود، یعنی طول خط شکسته ما هم بی نهایت خواهد بود .

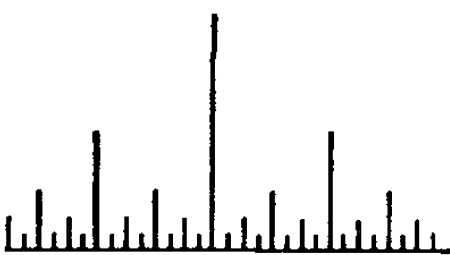
قالی ریاضی

می گویند که روزی کاترین دوم از یکی از ژنرالها پرسید : خمپاره انداز با اژدرافکن چه فرقی دارد ؟ ژنرال که خودش را گم کرده بود ، با دستپاچگی جواب داد : « ببینید سرور من ، خمپاره انداز يك چیز خاص است ، در حالی که اژدرافکن چیز خاص دیگری است . اگر از کسی هم که نسبت به ریاضیات بیگانه است ، تفاوت بین خط ، سطح و جسم را را بپرسید ، احتمالاً جوابی شبیه جواب ژنرال دریافت می کنید . از این بالاتر ، کسی که مورد پرسش قرار گرفته است ، دچار حیرت می شود که چگونه به این موضوع روشن جواب بدهد . آخر برای همه روشن است که خط سطح و جسم ، چیزهای بکلی متفاوتی هستند و هیچکس مثلاً منحنی دایره را سطح و یا کره را خط نمی نامد .

يك استاد بزرگ شطرنج لطیفه ای دارد . او می گوید : فرق بین استاد و مبتدی در بازی شطرنج در این است که برای مبتدی همه چیز در وضع روشنی قرار دارد ، در حالی که برای استاد همه چیز در پرده ای از ابهام است . همین وضع درباره پرسش ما هم مطرح است . البته در مورد شکلهایی از هندسه مانند مربع و دایره هیچکس دچار تردید نمی شود که آیا خط هستند یا سطح . ولی پس از آنکه در اثر کشف کانتود ، علم پیشرفت کرد ، شکلهای هندسی عجیبی پیدا شد که نه تنها دانش آموزان دبیرستانی ، بلکه حتی استادان آزموده ریاضی هم از جواب فوری در می مانند که آیا این شکل خط است یا سطح و یا جسم .

و حالا به یکی از این شکلهای می پردازیم . پاره خط $[0, 1]$ را انتخاب می کنیم ، آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم می کنیم و پاره خطی

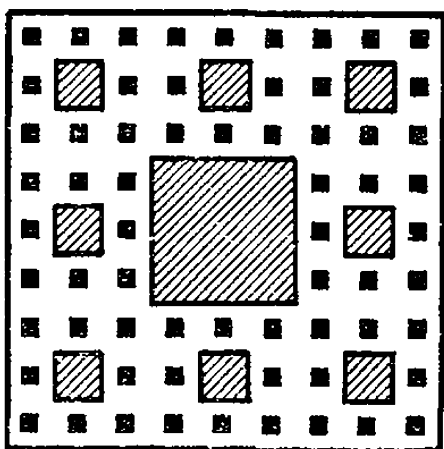
به طول $\frac{1}{4}$ عمود بر این پاره خط و در وسط آن رسم می‌کنیم، بعد هر کدام از دو نیمه را به دو قسمت مساوی تقسیم و دوباره در نقطه‌های تقسیم پاره خطهایی، منتهی این بار به طول $\frac{1}{4}$ ، بر آن عمود می‌کنیم. سپس هر يك از پاره خطهای جدید را نصف می‌کنیم و از نقطه‌های تقسیم پاره خطهای عمودی به طول $\frac{1}{8}$ رسم می‌کنیم. بعد از مرحله پنجم به شکلی شبیه آنچه که در شکل ۴۷ نشان داده‌ایم، می‌رسیم. ولی ما به مرحله



شکل ۴۷

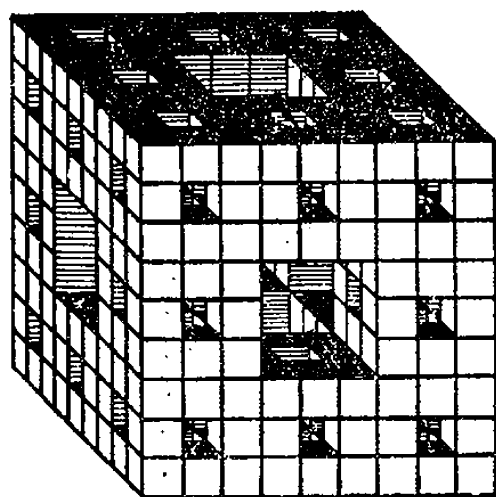
پنجم اکتفا نمی‌کنیم و عمل را با همین روش، بی‌نهایت بار ادامه می‌دهیم. در نتیجه يك شکل هندسی بدست می‌آید. حالا بگویید که این چه شکلی است، خط یا سطح؟ بی‌نهایت عمود رسم کرده‌ایم، و آیا اینها قطعه کوچکی را در کنار پاره خط $[0, 1]$ پر نمی‌کنند؟ جواب بد این پرسش خیلی هم ساده نیست.

و این هم مثالی دیگر: مربعی به ضلع ۱ انتخاب می‌کنیم، آنرا به ۹ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و قسمت وسط آنرا جدا می‌کنیم (ضلعهای مربع جدا شده باقی می‌ماند). بعد هر کدام از مربعهای باقیمانده را دوباره به ۹ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، مربع وسط را جدا می‌کنیم.



شکل ۴۸

اگر يك مرحله ديگر پيش برويم ، به شكل ۴۸ مي‌رسيم (مربعهاي جدا شده هاشور خورده و يا سياه شده‌اند) . روشن است كه شكل ۴۸ ، هنوز يك سطح است . ولي ما در مرحله سوم متوقف نمي‌شويم و عمل تقسيم مربعها به ۹ قسمت مساوي و جدا كردن مربع وسط را ، بي‌نهايت بار ادامه مي‌دهيم . پس از پايان كار به يك شكل هندسي مي‌رسيم كه به نام دانشمند لهستاني به وجود آورنده آن ، قالي سرپينسكي ناميده مي‌شود .



شكل ۴۹

اين شكل شبیه پارچه‌ای است كه به وسیله بافته مجنونی بافته شده باشد . در جهت درازا و پهنا ، نخهای تار و پود با نقشهای زیبا و متقارنی به هم بافته شده‌اند ، ولی خود پارچه بكلی سوراخ سوراخ است و حتی يك قطعه كامل در آن وجود ندارد و هر

قطعه مربعی كوچكی كه انتخاب كنیم ، سوراخی در وسط دارد . و بطور کلی معلوم نیست كه اين قالي چگونه است ؛ خط است یا سطح ؟ از يك طرف ، اين شكل حتی يك تيكه درست هم ندارد و بنابراین مشكل است كه آنرا سطح به حساب آورد ، از طرف ديگر ، از نخهایی تشكيل شده است كه با چنین نقشهای پیچیده‌ای پیوند دارند ، و چه کسی می‌تواند بدون آنكه تردید كند ، قالي سرپينسكي را نوعی خط در نظر بگیرد . در هر حالتی رسم اين «منحنی» هم غیرممکن است .

با وجود اين ، قالي سرپينسكي ، بغرنج‌ترین شكل هندسي نیست . به جای مربع ، می‌توان مكعبی انتخاب كرد و آنرا به ۲۷ قسمت مساوي

تقسیم کرد و سپس مکعب مرکزی را همراه با شش مکعب مجاورش ، از آن جدا کرد . بعد هریک از مکعبهای باقیمانده را دوباره به ۲۷ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و عمل جدا کردن را تکرار می‌کنیم (در شکل ۴۹ ، مکعب مفروض بعد از انجام مرحله دوم ، دیده می‌شود) . این عمل را با همین روش ، بی‌نهایت مرتبه ادامه دهیم ، در پایان کار چه شکلی می‌ماند - خط ، سطح یا جسم ؟

اقلیدس ، تقاضای کمک را رد می‌کند

پیش از این ، هروقت که ریاضی‌دانی با يك سؤال پیچیده هندسی برخورد می‌کرد ، قبل از همه به کتاب اقلیدس مراجعه می‌کرد تا ببیند این استاد بزرگ چه نوشته است . در طول قریب دوهزار سال ، اقلیدس معیار ریاضی‌دانها ، و کتاب او فرهنگ تفکرات هندسی بود . حتی فیلسوفهایی که تلاش می‌کردند خود را از سرزنش دیگران به‌خاطر بی‌دقتی در استدلالها ، برحذردارند ، به زبان اقلیدس رومی‌آوردند و حکمهای خود را به عنوان اصل ، لم و قضیه طرح می‌کردند .

و درست آنچه‌که مورد نیاز ما است ، به وسیله اقلیدس بدون هیچ ابهامی بیان شده است . سطرهای اول «مقدمات» ، کتاب اقلیدس ، چنین است .

۱. نقطه چیزی است که هیچ جزئی ندارد .
۲. خط هم ، امتدادی بدون پهناست .
۳. خط به نقطه ختم می‌شود .
۴. سطح چیزی است که تنها درازا و پهنای دارد .
۵. سطح به خط ختم می‌شود .
۶. مرز یا حد ، یعنی جایی که چیزی به آن ختم می‌شود .
۷. شکل عبارت است از چیزی که شامل مرزها و مرزهایی است .

اینها همان چیزهایی است که به دنبالش بودیم ، ولی اینها را نمی‌توان تعریفهای دقیق ریاضی شمرد . برای کسی که نقطه ، خط و سطح را نمی‌شناسد ، مشکل است که از این « تعریفها » چیزی عایدش شود و همان جواب ژنرال دست‌وپا گم کرده را به‌خاطر می‌آورد که : « خط چیز خاصی است ، ولی سطح ، چیز خاص دیگری است » . به‌هرحال از این تعریفها نمی‌شود فهمید که قالی سرپینسکی خط است یا سطح ، آیا فقط درازا دارد یا هم درازا دارد و هم پهنا .

ولی در زمان اقلیدس ، شکنهای پیچیده‌ای مثل قالی سرپینسکی را نمی‌شناختند ، و برای شکهای ساده هم خیلی نیاز به تعریف نداشتند : هرکسی می‌توانست ببیند که روی شکل کجا خط است و کجا سطح . ولی ظاهراً خود اقلیدس هم احساس می‌کرد که تعریفهای او از مفهومیهای اساسی ، آنقدرها هم خوب نیست . اقلیدس در تمام موارد ، در ابتدای مقاله ، تعریفها را می‌آورد و سپس بکلی آنها را فراموش می‌کند و حتی یکبار هم در تمام کتاب خود از آنها استفاده نمی‌کند .

آیا به تعریفهای دقیق‌تری نیاز داریم ؟

در طول دوهزارسال ، اقلیدس از اعتباری جدی برخوردار بود و هرگونه تردیدی در مورد موقعیت هندسهٔ اقلیدسی ، به‌عنوان توهین جدی به‌حیثیت تمامی ریاضیات تلقی می‌شد. کادل فرددیک گوس یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهای قرن نوزدهم، که قبل از لباچوسکی به فکر هندسهٔ غیراقلیدسی رسیده بود ، جرأت نکرد که نتیجهٔ بررسیهای خود را نشر دهد و به‌یک‌یکی از دوستانش نوشت که از هیاهوی بوتیها^۱ می‌ترسم . تنها نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی هندسه‌دان بزرگ‌روس بود که با شجاعت علمی و علی‌رغم تمسخر دانشمندانی که حرف او را نمی‌فهمیدند ، کشف خود را

(۱) يك طايفهٔ یونانی که به‌نقص عقل و حماقت مشهور بوده‌اند .

در زمینه هندسه غیر اقلیدسی ، منتشر کرد .

بعد از انتشار اثر لباچوسکی ، روشن شد که دو هندسه وجود دارد که از لحاظ منطقی به يك اندازه بی نقص اند ، ولی از نظر حکمها و قضیه‌ها بکلی باهم فرق دارند. ولی این حقیقت به معنای این است که هراستنادی به جمله « از لحاظ هندسی روشن است » ارزش خود را از دست می‌دهد. هر حکم هندسی باید بر اساس تعریفهای دقیق و استدلالهای منطقی بدون نقص باشد . و در هر حال ، برای مفهومیهای اساسی هندسه ، یعنی خط و شکل و جسم ، باید تعریفهای دقیقی ارائه داد و به هیچ وجه از این قبیل نباشد که « این چیز خاصی است و آن چیز خاص دیگری است » .

توجه به دقت در تعریفها ، نه تنها در هندسه ، بلکه به آنالیز ریاضی سده نوزدهم هم کشیده شد .

از برکت حساب دیفرانسیل و انتگرال که در اثر کارهای گوناگون نیوتون ، لایب‌نیتس ، اولر ، لاگرانژ و دیگر ریاضی‌دانهای بزرگ سده‌های هفدهم و هیجدهم ، مسأله‌های گوناگونی از محاسبه مسیر حرکت گلوله توپ گرفته تا پیش‌بینی حرکت سیاره‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار ، حل شد. ولی مفهومیهای اساسی که به کمک آنها به این نتیجه‌های جدی دست یافتند ، بکلی غیر دقیق بود . اساسی‌ترین مفهوم آنالیز ریاضی آن زمان ، مفهوم بی‌نهایت کوچک بود که در مرز بود و نبود به نظر می‌رسید ، چیزی در ردیف صفر ، اما نه صفر کامل . و ریاضی‌دانهای سده هیجدهم ناچار بودند شاگردان مردد خود را با کلمه‌های « کار کنید ! ایمان پیدا خواهید کرد » ، دلگرم کنند .

ولی ریاضیات ، مذهب نیست که بر پایه ایمان بنا شود ، از همه مهمتر ، روشهایی که در دست استادان بزرگ ، چنین نتیجه‌های جالبی به بار آورد ، به وسیله شاگردان کوچکتر ولی با استعداد ، منجر به خطا و پارادوکس شد . استقراء ساده ریاضی ، استادان را از خطای ناشی از

احساس غریزی ، که اغلب سریع تر از استدلال منطقی طولانی ، منجر به حصول جواب می شود ، حفظ می کرد ؛ ولی شاگردان چنین وسیله آزمایشی را نداشتند ، و به همین مناسبت در پایان سده هیجدهم ، جنجال فوق العاده ای بر سر انبوه رابطه هایی که ارزش آنها کمتر از کاغذی بود که برای چاپ آنها مصرف شده بود ، و قضیه های مشکوکی که میدان کاربرد آنها بکلی نامعلوم بود ، به وجود آمد .

درست مثل بچه ای که به اسباب بازی قشنگ شکسته خود نگاه می کند که چطور آنرا از نو بسازد ، ریاضی دانهای سده نوزدهم ، همه مفهومی را که تا آن زمان بکار می رفته است ، مورد انتقاد جدی و بیرحمانه قرار دادند و شروع به نوسازی ریاضیات بر اساس تعریفهای دقیق کردند . استناد به روشنی موضوع ، کنار گذاشته شد و به جای آن خواستار دقت منطقی شدند^۱ . ولی منطقی مورد نیاز ، حتی با ساده ترین جمله هایی که در دوره آنالیز ریاضی بکار می رفت ، سازگار نبود ، نمونه ای بیاوریم : «میدان G را در نظرمی گیریم که به وسیله منحنی بسته Γ محدود شده است .»

منحنی بسته یعنی چه ؟ چرا این منحنی میدان را محدود می کند ؟ منحنی بسته ، صفحه را به چند قسمت تقسیم می کند و کدامیک از این قسمتها مورد بررسی است ؟

ریاضی دانهای سده هیجدهم برای هیچکدام از این پرسشها ، پاسخی نداشتند . آنها بطور ساده ، شکل بیضی مانندی می کشیدند و گمان می کردند که به این ترتیب همه حرفها را زده اند ، ولی در سده نوزده ، دیگر به رسم شکل اعتقادی نداشتند . برای کسانی که با تحلیلی کار می کردند ، پرسش «خط چیست ؟» همچنان یکی از جدی ترین بحثها بود . و خیلی

(۱) و در واقع ، ضمن این «تصفیه» ، گاهی به جای آب ، ماهی را هم از ظرف بیرون ریختند ، ولی در سده بیستم بسیاری از آنچه را که کنار گذاشته شده بود ، دوباره به علم بازگرداندند .

خط ، به عنوان اثر حرکت نقطه

برای اینکه بتوانیم تعریف دقیقی از خط بدهیم ، باید از شکلها و نمونه های محسوسی شروع کنیم که برخورد با آنها منجر به پیدایش این مفهوم ریاضی شده است : نخ نازک دراز ، شعاع نور ، جاده باریک و طولانی و غیره . در همه این موردها ، طول آنقدر بزرگتر از پهناست که می توان از پهنا صرف نظر کرد . از همین جا تصور ریاضی خط ، که بدون پهناست ، به وجود آمده است .

برای نخستین بار ، کاهیل^۱ ددان ریاضی دان فرانسوی کوشش کرد تعریف دقیقی برای خط پیدا کند . او از اینجا شروع کرد که مسیر حرکت يك جسم بسیار كوچك ، عبارت است از لوله دراز و باریکی . هر اندازه که اندازه های جسم كوچكتر شود ، لوله باریکتر و باریکتر می شود ، به نحوی که در حد به سمت خط ، یعنی مسیر حرکت نقطه ، میل می کند که دارای پهنا نیست . به همین مناسبت ، او خط را به عنوان مسیر حرکت نقطه می پذیرد . ضمناً این نقطه باید بطور پیوسته و بدون جهش حرکت کند .

تعریف ددان را می توان به صورت دقیقتری بیان کرد . برای اینکه موقعیت نقطه متحرك را بدانیم ، باید مختصات آنرا در هر لحظه حرکت در دست داشته باشیم . از آنجا که حرکت در يك فاصله زمانی محدود ادامه دارد ، بدون اینکه به کلی بودن مطلب لطمه ای بخورد ، می توان این فاصله را $[0, 1]$ فرض کرد . به زبان دیگر ، نقطه مفروض حرکت خود را از لحظه ای ، که آنرا مبدأ به حساب می آوریم ، شروع می کند و بعد از واحدی از زمان (يك ثانیه ، يك دقیقه ، يك سال یا هر مدت دیگر) به پایان می رساند . در هر لحظه زمانی t ، در جریان

این فاصله ، مختصات نقطه متحرك معلوم می شود . بنابراین مختصات نقطه ، بستگی به لحظه زمانی t دارد و تابعی از آن است . این تابعها را (برای حالتی که حرکت نقطه روی يك صفحه جریان دارد) با $g(t)$ و $f(t)$ نشان می دهیم :

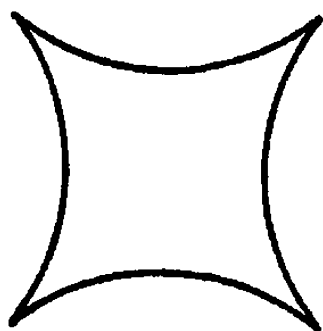
$$x = f(t) \text{ و } y = g(t)$$

این شرط که نقطه بطور پیوسته حرکت می کند ، به معنای آن است که تابعهای $f(t)$ و $g(t)$ در هر نقطه فاصله $[0, 1]$ پیوسته اند. روشن تر بگوییم ؛ برای هر تغییر کوچک t ، تابعهای $f(t)$ و $g(t)$ باید مقدار کمی تغییر کنند. دقیق تر: اگر $t_1, \dots, t_n$ ، به مقداری مثل t نزدیک شود یعنی $t_n = t$ حد ، تساویهای زیر برقرار است :

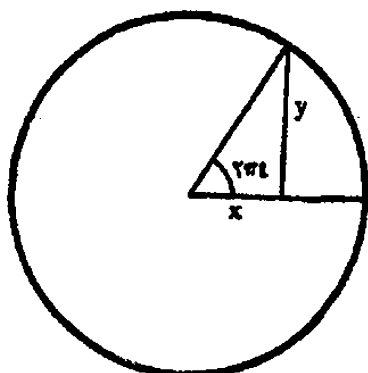
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = g(t)$$

تعریف ددان موفقیت زیادی پیدا کرد. همه خطهایی که در آن زمان مورد بررسی ریاضیات بود ، منحنیهایی به مفهوم ددان یا آنطور که می گویند منحنیهای ددانی بودند . مثلاً دایره ای به شعاع ۱ انتخاب می کنیم . طول محیط این دایره برابر است با 2π ، بنابراین برای اینکه



شکل ۵۱



شکل ۵۰

محیط آن در واحد زمان پیموده شود ، باید نقطه با سرعت 2π حرکت کند . به این ترتیب در لحظه t ، این نقطه کمانی به طول $2\pi t$ را طی کرده است . از شکل ۵۰ معلوم می‌شود که مختصات آن در لحظه t ، چنین می‌شود :

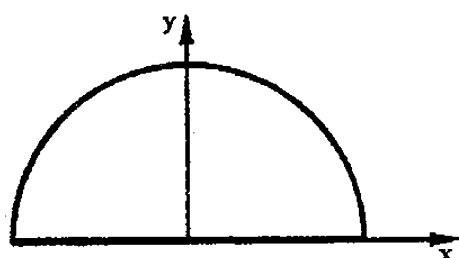
$$x = \cos 2\pi t$$

$$y = \sin 2\pi t$$

که آنها را معادله‌های پارامتری دایره گویند . معادله‌های پارامتری برای منحنی که در شکل ۵۱ نشان داده شده است (که نام آن آستروئید است) به این صورت است :

$$x = \cos^3 2\pi t$$

$$y = \sin^3 2\pi t$$



شکل ۵۲

خط ژردانی ممکن است از منحنیهای مختلفی تشکیل شده باشد مثلاً می‌توان محیط نیم دایره‌ای را انتخاب کرد که از نیم دایره به شعاع ۱ و قطر آن به وجود آمده است (شکل ۵۲) . نقطه متحرك در نیمی

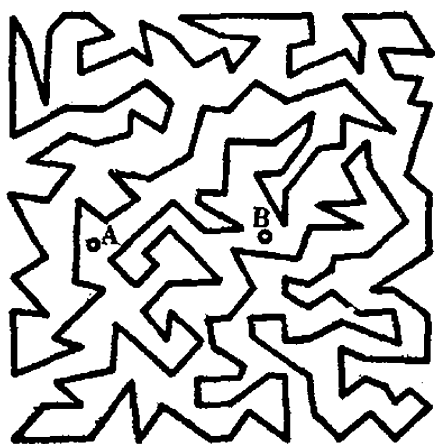
از زمان ، نیم دایره و در نیم دوم زمان ، قطر آن را می‌پیماید . عبارتهایی را که مختصات نقطه متحرك را روی دایره بیان می‌کند ، می‌شناسیم . ضمن حرکت نقطه روی قطر ، مقدار y مساوی صفر باقی می‌ماند و مقدار x از ۱ تا ۰ تغییر می‌کند . در نتیجه معادله‌های پارامتری زیر را برای این محیط بدست می‌آوریم .

$$x = \begin{cases} \cos 2\pi t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ 1 - 2t & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

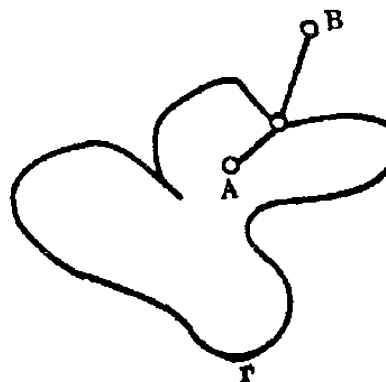
$$y = \begin{cases} \sin 2\pi t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

قضیه‌ای روشن با اثباتی بسیار مشکل

ژردان ، با استفاده از مفهوم منحنی ، که به وسیله خود او داده شده بود ، توانست مفهوم جمله‌ای را که قبلاً از يك كتاب درسی آنالیز ریاضی نقل کردیم ، دقیقتر کند. این جمله چنین بود: «میدان G را در نظر می‌گیریم که به وسیله منحنی بسته Γ محدود شده است». منحنی ژردانی وقتی بسته است که به ازای $t = 1$ در همان نقطه‌ای باشد که به ازای $t = 0$ بود. ضمناً اگر لحظه‌های زمانی مختلف t_1 و t_2 ، که بین ۰ و ۱ قرار دارند ، متناظر با نقطه‌های مختلف منحنی باشد ، این منحنی خودش را قطع نمی‌کند .



شکل ۵۴



شکل ۵۵

ژردان قضیه زیر را ثابت کرد :

منحنی ژردانی Γ ، اگر بسته باشد و اگر خودش را قطع نکند ، صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند . اگر دو نقطه در یکی از این قسمت‌ها انتخاب شود ، می‌توان آنها را با خط شکسته‌ای که منحنی Γ را قطع نمی‌کند ،

به هم وصل کرد ! ولی اگر نقطه ها ، از قسمتهای مختلف انتخاب شود ، نمی توان به وسیله چنین خط شکسته ای آنها را به هم مربوط کرد ، هر خط شکسته ای که آنها را به هم وصل کند با منحنی Γ برخورد خواهد داشت (شکل ۵۳) .

این قضیه بسیار روشن به نظر می رسد ، ولی اثبات آن به استدلالهای بسیار ظریفی نیاز دارد . حتی برای حالتی که خط Γ یک چند ضلعی بسته است ، اثبات قضیه بسیار پیچیده است . خودتان را آزمایش کنید و بلافاصله بگویید که آیا می توان دو نقطه A و B را در شکل ۵۴ طوری با یک خط شکسته به هم وصل کرد که دوره Γ را قطع نکند .

دو قسمتی که به وسیله منحنی بسته Γ (دو دان روی صفحه به وجود می آید ، میدانهای داخلی و خارجی محدود به این منحنی نامیده می شود . به این ترتیب مفهوم میدانی که به وسیله یک منحنی بسته محدود شده است ، به صورت مفهوم دقیقی در می آید .

منحنی از تمام نقطه های مربع عبور می کند

وقتی که Γ (دو دان تعریف خودش را از منحنی داد ، ابتدا به نظر رسید که همه چیز حل شده است و تعریف دقیقی برای مفهوم خط بدست آمده است که متکی بر مشاهده نیست . ولی به زودی معلوم شد که اینطور نیست ، تعریف Γ (دو دان نه تنها در مورد خطهایی که برای ریاضی دانها عادی بود ، کفایت می کرد ، بلکه شامل شکلهایی هم می شد که هیچکس آنها را خط نمی نامد . ریاضی دانها ، حالا دیگر با منحنیهای خاردار هر جور بود آشتی کرده بودند ، ولی هیچکس تصور این را هم نمی کرد که مثلاً مربع را هم می توان خط به حساب آورد . معلوم شد که هم مربع ، هم مثلث و هم دایره (منظور تنها محیط مثلث ، مربع با دایره نیست ، بلکه تمام مثلث ، مربع یا دایره با همه نقطه های داخلی آنها مورد نظر است) ، طبق تعریف

ژداندان ، خط هستند . این مطلب را په آنو ریاضی دان ایتالیایی ثابت کرد .
 پیش از این گفتیم که کانتود توانست بین نقطه های يك پاره خط و
 نقطه های روی يك مربع ، تناظر يك به يك برقرار کند ، یعنی ثابت کرد که
 روی يك پاره خط همانقدر نقطه وجود دارد که روی يك مربع . این تناظر
 پیوسته نیست ، وقتی که نقطه روی پاره خط حرکت می کند ، نقطه متناظر
 آن روی مربع مثل خزوك نمی خزد ، بلکه مثل كلك پرش می کند . مثلاً
 روی پاره خط ، این نقطه ها را انتخاب می کنیم :

$$0/500000000... \text{ و } 0/499999999...$$

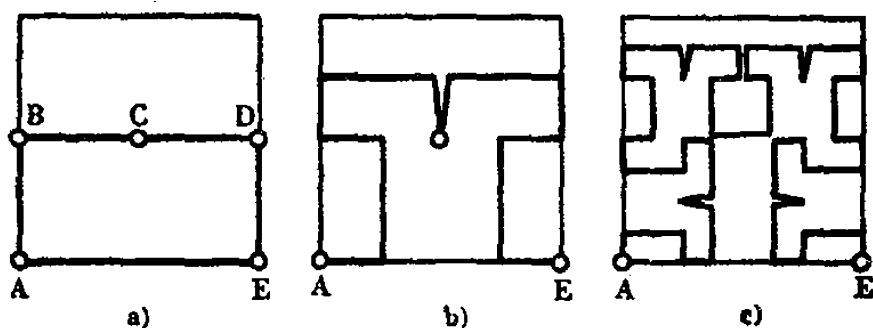
این دو نقطه به اندازه کافی به هم نزدیکند . ولی نقطه های متناظر
 آنها روی مربع دور از هم قرار دارند . اولین آنها ، نقطه های $(0/000...)$
 ، $(0/500000000...)$ را متناظر می کند که روی ضلع پایینی مربع قرار گرفته
 است ، در حالی که دومین آنها ، نقطه های $(0/999...)$ ، $(0/499999999...)$
 را متناظر می کند که روی ضلع بالایی مربع قرار دارد . اگر تعداد رقمهای
 ۹ را در عدد دوم زیاد کنیم ، به عدد اول نزدیک می شود ، در حالی که
 نمی توان تصور کرد که نقطه های متناظر آنها به هم نزدیک شود .

به این ترتیب ، اگر چه نگاشت کانتوری پاره خط روی مربع در
 تناظر يك به يك است ، ولی پیوسته نیست . و بنابراین از این راه منحنی
 ژدانی بدست نمی آید . په آنو موفق شد نگاشت دیگری از مجموعه
 نقطه های واقع بر پاره خط را روی مجموعه نقطه های مربع بسازد ، که بنابر آن
 نقطه های نزدیک به هم در پاره خط ، متناظر با نقطه های نزدیک به هم در مربع
 است ، به عبارت دیگر ، په آنو توانست خط منحنی (به مفهوم ژداندان)
 بسازد که از همه نقطه های مربع عبور کرده باشد !

بدیهی است که منحنی په آنو را نمی توانیم رسم کنیم ، مگر اینکه
 به تقلید از نقاشیهای تجربیدی ، يك مربع را سیاه کنیم . مگر نه این است
 که در این مربع هیچ چیز فرق نمی کند ، نمی شود فهمید که منحنی از کجا

شروع و به کجا ختم شده است ، و چگونه مربع را دور زده است .
 به همین مناسبت ، به جای نقاشی تجربیدی ، از فیزیک پهن پیروی می کنیم
 و موقعیتهای نقطه متحرك را با پاره خطهای راست به هم وصل می کنیم .
 هر چه فاصله زمانی بین موقعیتهای جداگانه را کوچکتر بگیریم ، خط
 شکسته ای که بدست می آید به منحنی په آنو نزدیکتر خواهد بود .

ابتدا موقعیت نقطه متحرك را در هر $\frac{1}{4}$ ثانیه در نظر می گیریم .
 به عبارت دیگر وضع نقطه را در ابتدای حرکت ، بعد از گذشت $\frac{1}{4}$ ثانیه
 از شروع حرکت ، بعد از گذشت $\frac{1}{4}$ ثانیه از شروع حرکت ، بعد از $\frac{2}{4}$
 ثانیه و بالاخره در انتهای حرکت ، مشخص می کنیم . به این ترتیب ۵
 نقطه بدست می آوریم . از وصل این ۵ نقطه به یکدیگر ، خط شکسته
 ABCDE بدست می آید که در شکل ۵۵- a نشان داده شده است .



شکل ۵۵

روشن است که این خط شکسته از همه نقطه های مربع نمی گذرد .
 با کم کردن فاصله زمانی ، موقعیت نقطه ها را برای هر $\frac{1}{16}$ ثانیه یکبار ،
 معین می کنیم . خط شکسته پیچ در پیچ تر و تعداد نقطه های شکستگی بیشتر
 می شود و به صورتی که در شکل ۵۵- b می بینیم در می آید . اگر باز هم
 موقعیت نقطه ها را با فاصله زمانی کمتر در نظر بگیریم ، به شکل ۵۵- c
 می رسمیم . می بینیم که خط شکسته فشرده تر و فشرده تر مربع را پر می کند
 و به هر نقطه دلخواه آن نزدیک و نزدیکتر می شود . و در حد ، وقتی که

موقعیت نقطه‌ها را در تمام لحظه‌های متوالی در نظر بگیریم ، منحنی په‌آنو بدست می‌آید که از همه نقطه‌های مربع گذشته است .

متذکرمی شویم که در مقایسه با روش کانتود ، منحنی په‌آنو امتیازی دارد و آن این است که این منحنی پیوسته است ، ولی در عوض چیز دیگری را از دست می‌دهد . منحنی په‌آنو نگاشت پاره‌خط بر مربع را در تناظر يك به يك قرار نمی‌دهد . این منحنی از هر نقطه مربع چندبار می‌گذرد . بعدها ثابت شد که نمی‌توان در عین حال هم پیوستگی و هم تناظر يك به يك را با هم به وجود آورد : منحنی ژدانی وجود ندارد که از همه نقطه‌های مربع ، و ضمناً از هر نقطه آن تنها یکبار ، گذشته باشد .

همه چیز در معرض نابودی

به سختی می‌توان اثری را که نتیجه گیری په‌آنو روی دنیای ریاضیات باقی گذاشت ، ارزیابی کرد . به نظر می‌رسید که همه چیز به هم ریخته است : بنیانی ترین تعریفهای ریاضی ، معنای خود را از دست داده‌اند و اختلافی بین خط و سطح ، و بین سطح و جسم دیده نمی‌شود (عدم امکان برقراری تناظر يك به يك و به صورت پیوسته ، بین پاره‌خط و مربع ، هنوز ثابت نشده بود) . هانری پوانکاره ، ریاضی دان مشهور فرانسوی ، باتلخی فریاد زد : «چطور ممکن است که احساس درونی تا به این اندازه مارا فریب دهد!» .

روشن شد که تعریف ژدان از خط ، بی‌عیب نیست . از يك طرف این تعریف بقدری وسیع است که شامل منحنی په‌آنو هم می‌شود . از طرف دیگر بقدری تعریف تنگی است که نمی‌تواند شامل همه نمونه‌هایی بشود که ما به خاطر حس درونی خود و به خاطر روشنی موضوع ، آنها را خط به حساب می‌آوریم . مثلاً خطی که در شکل ۴۴ صفحه ۱۶۵ نشان داده‌ایم (دایره با مارپیچی که دور آن پیچیده است) ، هنوز منحنی ژدانی نیست .

نارسایی پنهانی دیگری هم در تعریف دُردان پیدا شد : در این تعریف تنها گفتگو از منحنی نمی‌رود ، بلکه به آهنگ حرکت نقطه و چگونگی این حرکت هم بستگی دارد . فرض کنید که نقطه متحرك نیم اول دایره را در $\frac{1}{4}$ دقیقه و نیم دوم آنرا در $\frac{3}{4}$ دقیقه طی کند . روشن است که در این حالت معادله‌های پارامتری دیگری ، غیر از معادله‌های صفحه ۱۷۶ ، بدست می‌آید .

نقطه می‌تواند محیط دایره را با شیوه‌های مختلف ، با زیاد کردن و کم کردن سرعت طی کند . بنابراین تنها برای دایره ، معادله‌های پارامتری مختلفی بدست می‌آید . به سختی می‌توان حدس زد که معادله‌های

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

همان دایره‌ای را می‌دهد که از معادله‌های زیر بدست می‌آید :

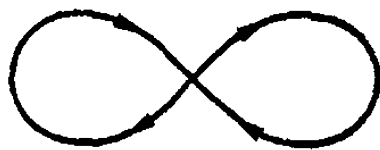
$$x = \cos \varphi \pi t$$

$$y = \sin \varphi \pi t$$

و برای منحنیهای بغرنج‌تر به سادگی سر درگمی به وجود می‌آید . مثلاً لمینسکات را در نظر می‌گیریم . این منحنی را می‌توان به ترتیبی که در شکل ۵۶-ا و یا آنطور که در شکل ۵۶-ب نشان داده شده است ، دور



a)



b)

شکل ۵۶

زد . و روشن است که اگر به معادله‌های مختلف آن در دو حالت نگاه کنیم ، به سختی می‌توان فهمید که آیا متعلق به يك منحنی هستند یا منحنیهای

به این ترتیب دوباره در برابر این پرسش قرار می گیریم که خط چیست و چه تفاوتی با سطح دارد ؟ پاسخ به این پرسش به بررسیهای کلی کانتود در باره شکلهای هندسی مربوط می شود .

مجسمه ها را چگونه می سازند ؟

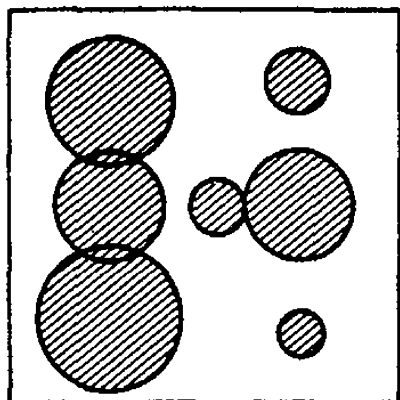
کانتود ضمن به وجود آوردن نظریه مجموعه ها ، به این پرسش رسید که شکل هندسی چیست ؟ يك پاسخ کلی به این پرسش چنین است : شکل هندسی عبارت است از مجموعه ای از نقطه های فضا . اگر این مجموعه بر صفحه قرار گیرد ، شکل هندسی مسطح بدست می آید . ولی این پاسخ خیلی کلی است و به این مفهوم ، تقریباً هیچ خاصیت مورد نظری را به «شکل» نسبت نمی دهد .

بنابراین در نظر اول باید خود را به گروهی از این مجموعه ها محدود کرد و از میان آنها ، آنچه را که به خاصیت های شکل های هندسی معمولی نزدیکتر است ، جدا کرد .

برای اینکه این دسته از شکلها را جدا کنیم ، روشن می کنیم که شکل های معمولی از قبیل مربع ، دایره ، پاره خط ، خط راست ، آستروئید و غیره ، چه اشتراکی نسبت به هم دارند . به نظر می رسد که همه این شکلها را می توان با روش واحدی بدست آورد .

حکایت می کنند که وقتی از دادن مجسمه ساز معروف پرسیدند که چطور توانسته است مجسمه های فوق العاده خود را به وجود آورد ، پاسخ می دهد : «يك قطعه مرمر انتخاب می کنم و همه آنچه ، ا که زیادی است ، از آن جدا می کنم» .

درست با همین روش می توان هر شکل هندسی مسطحه محدود را بدست آورد : باید چارچوبی را که این شکل در آن قرار گرفته است ،



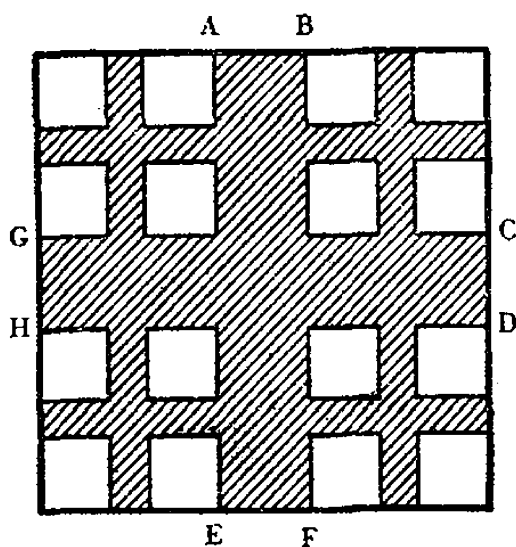
شکل ۵۷

انتخاب کرد و سپس همهٔ زیادیها را از آن جدا نمود. ولی این جدا کردن را باید به تدریج، و نه یکباره انجام داد، در هر گام قطعه‌ای را که به شکل دایره است از آن جدا می‌کنیم. در این میان، خود دایره جدا می‌شود، ولی دورهٔ آن در شکل باقی می‌ماند.

در برخورد اول به نظر می‌رسد که به این ترتیب می‌توان تنها شکل‌هایی شبیه آنچه که در شکل ۵۷ دیده می‌شود، بدست آورد. ولی مطلب بر سر این است که نه يك يا دو دایره، بلکه مجموعهٔ شمارایی دایره جدا می‌کنند. و به کمک جدا کردن مجموعهٔ شمارای دایره‌ها، می‌توان هر شکل دلخواه را بدست آورد. برای این منظور چنین عمل می‌کنیم: همهٔ دایره‌هایی را انتخاب می‌کنیم که هر دو مختص مرکز و شعاع آن، عددی گویا باشند. با توجه به قضیه‌ای که در صفحهٔ ۱۵۴ آوردیم، مجموعهٔ این دایره‌ها، شمارا است، حالا همهٔ دایره‌هایی از این مجموعه را، که در داخل آنها حتی يك نقطه از شکل هندسی ما وجود ندارد، جدا می‌کنیم. روشن است که بعد از این عمل، تنها خود این شکل باقی می‌ماند و تعداد دایره‌های جدا شده بیشتر از حد شمارا نیست.

البته ناچار نیستیم که قطعه‌های جدا شده را به شکل دایره انتخاب کنیم. به جای دایره می‌توان مربع، مستطیل یا بیضی اختیار کرد، تنها يك شرط را باید در نظر گرفت: نقطه‌های داخلی شکل جدا شده خارج می‌شود و محیط آن باقی می‌ماند.

به كمك جدا کردن مجموعه شمارایی دایره (مربع و غیره) ، علاوه بر شکلهای هندسی عادی ، مجموعه‌های دیگری را هم می‌توان بدست آورد که خاصیت‌های بسیار جالبی دارند . مثلاً ، قالبی سرپینسکی که بارها در باره آن صحبت کرده‌ایم ، از همین راه بدست می‌آید : از مربعی به ضلع ۱ ، مربعهایی که یکی پس از دیگری کوچکتر می‌شوند ، جدا می‌کنیم ، به نحوی که ضلعهای آنها باقی بماند .



شکل ۵۸

ولی ، با این روش می‌توان «شکلهایی» هم بدست آورد که یکپارچه نباشد. مثلاً اگر شبیه شکل ۵۸ ، «صلیبها» را جدا کنیم ، در انتهای کار مجموعه‌ای بدست می‌آید که شامل حتی يك تکه درست هم نیست (به اصطلاح کاملاً غیر مرتبطاند) . به همین مناسبت این محدودیت را می‌پذیریم که بعد از هر برش ، مجموعه‌ای یکپارچه باقی بماند . در این صورت بعد از همه برشها هم مجموعه‌ای یکپارچه باقی می‌ماند (یعنی به اصطلاح ریاضی‌دانها ، يك مجموعه مرتبط) ، علاوه بر این مجموعه‌ای که بدست می‌آید محدود است ، یعنی تمامی آن در يك مربع قرار دارد .

به این ترتیب، مجموعه‌های مورد بررسی دارای این شرطها هستند:

- (۱) مجموعه F از يك مربع، با جدا کردن مجموعه شمارای دایره‌ها (مربعها و غیره) ، با حفظ محیط آنها ، بدست می‌آید ؛
- (۲) مجموعه F یکپارچه (مرتبط) است .

کانتود این مجموعه‌ها را هم ، متصله نامید (کلمه لاتینی «Continuum» به معنی «پیوسته»). متصله‌ها هم مجموعه‌های عمومی هستند که خاصیت‌هایی نزدیک به خاصیت‌های شکل‌های هندسی دارند .

خط کانتور

حالا دیگر آمادگی این را داریم که به پرسش مورد نظر پاسخ دهیم : خط مسطحه چیست ؟ چون خط مسطحه باید يك شکل هندسی باشد ، روشن است که باید آنرا بین متصله‌ها جستجو کرد . ولی مثلاً دایره و مربع (منظور مجموعه نقطه‌های واقع در داخل و روی محیط دایره یا مربع است) هم متصله هستند، درحالی که این شکلها را نمی‌توان خط به حساب آورد . بنابراین باید شرط دیگری را اضافه کنیم تا این شکلها را مشخص کند .

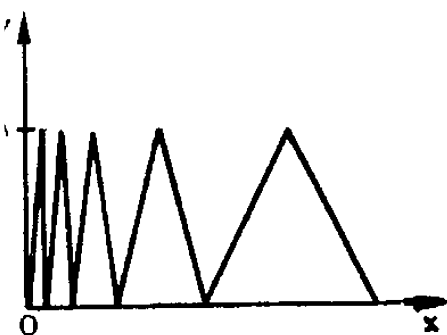
توجه می‌کنیم که دایره و مربع شامل يك تکه « پروبه هم پیوسته » از سطح است، درحالی که خط تکه به هم پیوسته‌ای از سطح را شامل نمی‌شود؛ هرچقدر که مربع را کوچک بگیریم ، همیشه در آن نقطه‌هایی پیدا می‌شود که متعلق به خط نیست (شکل ۵۹) . و این همان شرطی است که باید

اضافه کنیم : از نظر کانتود ، خط مسطحه به متصله واقع بر صفحه‌ای گفته می‌شود که حتی شامل يك تکه « پروبه هم پیوسته » صفحه نباشد (یعنی در هر مربع دلخواه صفحه ، نقطه‌هایی وجود داشته باشد که به این خط متعلق نباشد) .



شکل ۵۹

مثلاً پاره خط ، محیط مثلث ، محیط دایره ، دوره ستاره پنج پر ، همه خط هستند . قالی سرپینسکی هم يك خط می شود ، زیرا برای بدست آوردن آن ، همه مربعهای تقسیم را سوراخ کرده ایم و حتی يك قطعه کامل مسطحه در آن باقی نمی ماند . محیط دایره ، هم همراه با مارپیچی که دور آن پیچیده است ، خط می شود ؛ همچنین شکل دندانهای شکل ۶۰ همراه با پاره خط $[0, 1]$ از محور عرض هم طبق این تعریف يك خط خواهد بود . بطور کلی همه شکلهایی که به کمک احساس درونی و به مفهوم ساده تصور ما ، خط هستند ،



شکل ۶۰

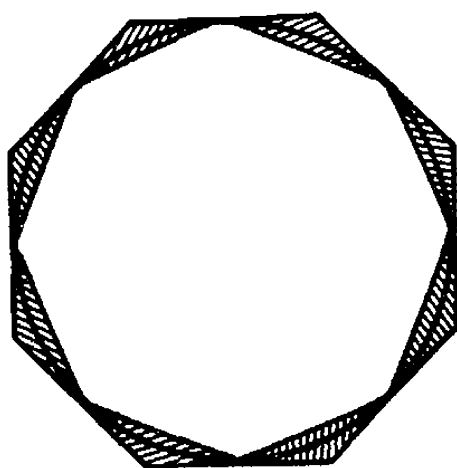
از نظر تعریف کانتوری آن نیز خط به حساب می آیند ، و تمام شکلهایی که شامل لا اقل يك قطعه کامل سطح باشند ، در ردیف خطهای کانتوری نیستند .

ولی در بین خطهای کانتوری ، نمونه هایی هم وجود دارد که خاصیت های آنها هیچ شباهتی به خطهای معمولی ندارد . و حالا ما به شرح بعضی از این خطها می پردازیم .

آیا مساحت خط همیشه مساوی صفر است ؟

بعد از آنکه خواننده با خطی آشنا شده است که از همه نقطه های مربع می گذرد ، می تواند آمادگی هر مطلبی را داشته باشد . با وجود این ، آیا ممکن است که خط دارای مساحت باشد ؟ اقلیدس می گفت که خط يك درازای بدون پهنا است . و در جایی که پهنایی وجود ندارد ، از کجا می توان مساحتی پیدا کرد ؟ در تعریف کانتوری خط هم گفته می شود که شامل هیچ قطعه کاملی از سطح نیست . پس چگونه می توان به مساحتی برای آن رسید ؟ با وجود همه اینها ، در دادن پاسخ قطعی شتاب نکنید .

قبل از آنکه به بررسی این پرسش بپردازیم ، درباره مفهوم جمله‌هایی که بکار می‌بریم ، موافقت کنیم . ببینیم جمله «خط دارای مساحت صفر است» یا «خط دارای مساحت غیر صفر است» به چه معنی است؟ عادی‌ترین خطها را انتخاب می‌کنیم : پاره خط راست . چون پهنای پاره خط مساوی صفر است ، می‌توان آنرا در داخل مستطیلی که مساحت آن تا حد دلخواه كوچك است ، جا داد ؛ تنها باید عرض این مستطیل را به حد دلخواه كوچك گرفت . به همین ترتیب می‌توان دایره را بین چند ضلعیهایی قرار داد ، که مساحت بین آنها به اندازه دلخواه كوچك باشد .



شكل ۶۹

برای این منظور کافی است چند ضلعی منتظمی با تعداد ضلعهای زیاد ، در آن محاط کنیم و چند ضلعی متشابه با آن را بر دایره محیط کنیم . میدانی که بین این دو چند ضلعی قرار گرفته است ، مساحت كوچکی دارد (هرچه تعداد ضلعهای چند ضلعیها بیشتر باشد ، این مساحت كوچکتر است) و محیط دایره کاملاً در این میدان قرار دارد .

حالا دیگر معنای جمله خط دارای مساحت صفر است روشن می‌شود . این جمله به این معنی است که عدد مثبت ϵ را هر قدر كوچك انتخاب کنیم ، میدان چند ضلعی پیدا می‌شود که شامل خط است و مساحتی کمتر از ϵ دارد . و اگر برای يك عدد مثبت ϵ ، نتوان چنین میدانی را پیدا کرد ، مساحت خط مساوی صفر نخواهد بود .

برای اینکه این تعریف روشن‌تر شود ، آنرا در مورد خطی که پیچیده‌تر از پاره خط و دایره باشد ، بکار می‌بریم . یکی از این خطها ،

قالی سرپینسکی است . مساحت آنرا پیدا می کنیم . به خاطر می آوریم که مساحت تمام مربع برابر است با ۱ . در گام اول ، مربعی را از آن جدا کرده ایم که مساحت آن مساوی $\frac{1}{9}$ است . در نتیجه میدان چند ضلعی با مساحت $\frac{8}{9}$ بدست می آید . در مرحله دوم ۸ مربع جدا می کنیم که هر کدام از آنها مساحتی مساوی $\frac{1}{81}$ دارد . بعد از این مرحله ، میدان چند ضلعی پیدا می شود که مساحت آن چنین است :

$$\frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

حالا دیگر روشن است که بعد از مرحله سوم ، میدان چند ضلعی به مساحت $\left(\frac{8}{9}\right)^3$ و سپس $\left(\frac{8}{9}\right)^4$ و غیره خواهد شد . ولی اگر يك کسر مثبت کوچکتر از واحد را مرتباً به توانهای بزرگتر و بزرگتر برسانیم ، در حد به سمت صفر میل می کند ، اگر داشته باشیم $0 < q < 1$ ، خواهیم داشت :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

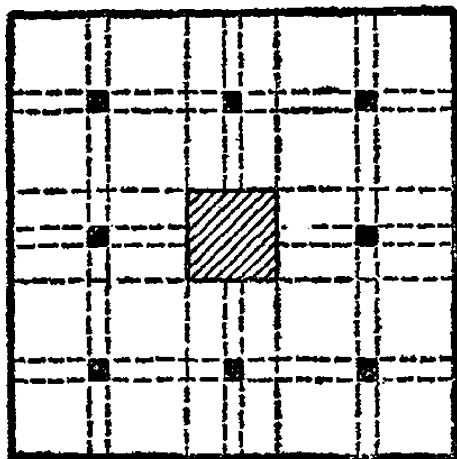
و در حالت خاص : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$. ولی بنابر تعریف حد ، این مطلب به این معنی است که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی برای n پیدا می شود که به ازای آن داشته باشیم $\left(\frac{8}{9}\right)^n < \varepsilon$. بنابراین بعد از مرحله n ام ، میدان چند ضلعی بدست می آید که مساحت آن کمتر از ε است . و این میدان ، قالی سرپینسکی را بطور کامل می پوشاند . مساحت قالی سرپینسکی مساوی صفر می شود .

به نظر می رسد که تعریف اقلیدس به پیروزی کامل رسیده است .

حتی برای خط به این پیچیدگی، مثل قالی سرپینسکی، مساحت مساوی
 صفر می شود. ولی جشن پیروزی، دیری نمی پاید. آخر هیچکس ما را
 مجبور نمی کند قطعه هایی به این بزرگی جدا کنیم. با صرفه جویی
 بیشتری عمل می کنیم و مربع را به جای ۹ قسمت به ۲۵ قسمت تقسیم
 می کنیم (یعنی هر ضلع آنرا به ۵ قسمت). مربع وسط را، که مساحتی
 مساوی $\frac{1}{25}$ دارد، از آن جدا می کنیم. حالا شاید خواننده بخواهد هر يك
 از ۲۴ مربع باقیمانده را دوباره به ۲۵ قسمت تقسیم کند و از هر کدام،
 مربع وسط را بردارد. ولی این با فکر صرفه جویی ما نمی سازد. به جای
 آن، پاره خطهایی که مربع بریده شده را محدود می کنند، انتخاب و
 آنها را ادامه می دهیم تا ضلعهای مربع بزرگ را قطع کنند برای ما ۴
 مربع (در گوشه ها) و ۴ مستطیل بدست می آید. در هر يك از این مربعها
 و مستطیلها، صلیبی به پهنای $\frac{1}{25}$ رسم و قسمت وسط صلیب را جدا
 می کنیم (شکل ۶۲). چون مساحت هر کدام از این قسمت های مرکزی
 مساوی $\frac{1}{625}$ است، مساحت همه مربعهایی که در مرحله دوم بریده می شود،
 برابر $\frac{8}{625}$ خواهد شد. در مرحله سوم، ۶۴ مربع جدا می شود که روی هم
 مساحتی برابر $\frac{64}{25^2}$ یعنی $\frac{64}{15625}$ خواهد داشت و غیره. این مساحتها
 تشکیل يك تصاعد هندسی می دهند:

$$\frac{1}{25} + \frac{8}{25^2} + \frac{64}{25^3} + \dots$$

که قدر نسبتی مساوی $\frac{8}{25}$ دارد. مجموع همه جمله های این تصاعد
 هندسی مساوی $\frac{1}{17}$ است. ولی این به چه معنی است؟ این نتیجه به معنای



شکل ۶۲

آن است که در هر مرحله ، مقدار
 مساحتی که باقی می ماند از $\frac{16}{17}$
 کمتر نیست ، و میدان چند ضلعی
 که مساحت آن کمتر از $\frac{16}{17}$ باشد و
 باقیمانده مربع را پوشانده باشد ،
 وجود ندارد . ولی مگر نه اینکه
 این باقیمانده ، مثل قالی سرپینسکی ،
 عبارت است از يك منحنی (به مفهوم

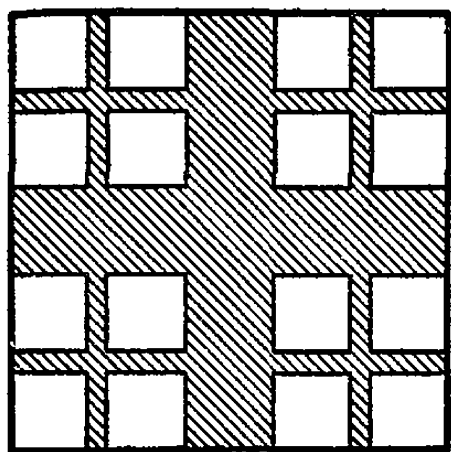
تعریف کانتوری آن) . برای ساختن آن هر مستطیل را سوراخ کرده ایم و
 حتی يك مستطیل کامل هم در آن وجود ندارد .
 به این ترتیب معلوم می شود که منحنی ، به مفهوم تعریف کانتوری
 آن ، می تواند مساحتی غیر صفر داشته باشد .

میدان بدون مساحت

با همه اینها نمونه مورد بررسی خیلی قانع کننده نیست : خطی
 که بدست آوردیم در سر تا سر خود از نقطه هایی تشکیل شده است که
 به هم برخوردند و هیچ میدانی را محدود نمی کند . بنابراین بررسی
 پیش می آید : آیا می توان منحنی «خوبی» بدست آورد که نقطه های
 به هم برخوردده نداشته باشد (یعنی منحنی بسته ددانی بدون اینکه با
 خودش برخورد داشته باشد) و مساحتی غیر صفر داشته باشد ؟ ظاهراً
 ممکن است !

برای ساختن این منحنی ، ساختمان قبلی را کمی تغییر می دهیم .
 ابتدا مجموعه ای می سازیم که در آن نه تنها تکه های کامل سطح ، بلکه
 حتی تکه های کامل خط هم پیدا نشود ، ولی مساحت آن مساوی صفر

نباشد . برای این منظور ، به جای مربعهای مرکزی ، صلیبهای کامل را ،



شکل ۶۳

مطابق آنچه که در شکل ۶۳ می بینید ، جدا می کنیم . ضمناً اندازه های صلیب اول را طوری می گیریم که مساحت آن $\frac{1}{25}$ باشد ، به همین ترتیب مساحت همه صلیبهایی که در مرحله دوم جدا می شود مساوی $\frac{64}{625}$ یعنی $(\frac{1}{25})^2$

و برای مرحله سوم $(\frac{1}{25})^3$ و غیره

باشد . در این صورت همه صلیبهای جدا شده مساوی مجموع جمله های تصاعد هندسی زیر می شود :

$$\frac{1}{25} + (\frac{1}{25})^2 + (\frac{1}{25})^3 + \dots$$

یعنی مساوی $\frac{1}{17}$. ولی این مقدار کمتر از نصف مساحت تمام مربع است . به

این ترتیب سهم مساحت باقیمانده مساوی $\frac{9}{17}$ مساحت تمام مربع می شود . ولی برای ساختن این باقیمانده ، صلیبهای کاملی را از مربع جدا کرده ایم . هیچ دو نقطه ای از این باقیمانده را نمی شود با خطی به هم وصل کرد ، حتی خط به مفهوم کانتود ؛ هرگونه ارتباطی بین نقطه های این باقیمانده از بین رفته است . آنطور که ریاضی دانها می گویند ، باقیمانده عبارت است از مجموعه ای بکلی غیر مرتبط . ولی مساحت این مجموعه ای که نه شامل يك تکه کامل سطح و نه شامل يك تکه قوس منحنی است ، مخالف صفر است ؛ در هیچ حالتی يك میدان چند ضلعی ، که

مساحتی کمتر از $\frac{9}{17}$ داشته باشد ، این مجموعه را نمی‌پوشاند .

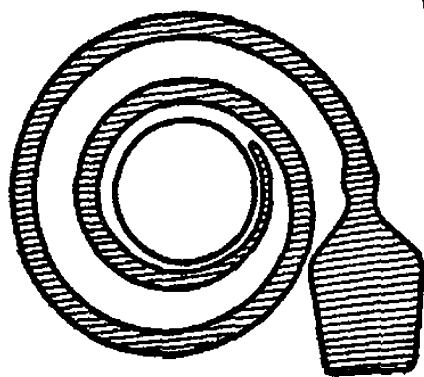
حالا دیگر به سادگی می‌توان منحنی بسته‌ای ساخت که بخود بر نخورده باشد و مساحتی غیر صفر داشته باشد . برای این منظور باید نقطه‌های بدست آمده را به هم وصل کنیم (درست شبیه آنچه که درباره منحنی که از همه نقطه‌های مربع عبور می‌کرد ، انجام دادیم) . از آنجا که در هر مرحله ، يك صلیب کامل را جدا کرده‌ایم ، خطی که بدست می‌آید با خودش برخورد ندارد (و در همین نکته هم با منحنی په‌آنو تفاوت دارد) . ولی چون این خط از همه نقطه‌های مجموعه ، که مساحتی حداقل مساوی $\frac{9}{17}$ داشت ، می‌گذرد ، مساحت خط بدست آمده هم ، حداقل مساوی $\frac{9}{17}$ است .

و حالا دیگر هیچ چیز مانع آن نیست تا میدانی بسازیم که مساحت نداشته باشد . برای این منظور کافی است نقطه‌های A و B از منحنی بدست آمده را به وسیله خط دلخواهی ، و مثلاً نیم‌دایره ، به هم مربوط کنیم . به این ترتیب خط Γ که به این ترتیب بدست می‌آید ، میدانی مانند G را محدود می‌کند . مساحت این میدان چقدر است ؟ جواب را نمی‌توان داد ، مگر اینکه بدانیم که آیا مرزهای این میدان را هم جزئی از آن به حساب می‌آوریم یا نه ؛ آخر خود مرز مساحتی دارد که حداقل مساوی $\frac{9}{17}$ است . روشن است که میدان ما دارای مساحت معمولی نیست . در ریاضیات ، به چنین میدانهایی که دارای مساحت معمولی نیستند ، مساحت ناپذیرگویند .

نمونه‌های غیرمنتظره

شاید بعد از پیدا شدن منحنی په‌آنو ، ریاضی‌دانها مطمئن بودند

که «عجیب‌ترین» تابعها و خطهای غیرعادی را شناخته‌اند. با وجود این، بعد از آن هم بارها متوسل به احساس درونی هندسی شده‌اند. برای اینکه به تفاوت خاصیت‌های خط کانتوری با خط معمولی پی ببریم، بهتر است به گزارش تاریخی زیر توجه کنیم:



شکل ۶۴

در ابتدای سده بیستم، تعدادی از نوشته‌های شن‌فلیس ریاضی‌دان مشهور چاپ شد که در آنها درباره خاصیت‌های مختلف منحنیها، مرز میدانها و غیره صحبت شده بود. ضمناً شن‌فلیس اغلب بر جمله «از لحاظ هندسی

روشن است» تکیه کرده بود. ولی بعد از چند سال، در سال ۱۹۱۰، مقاله کوتاهی (تنها ۱۲ سطر) به وسیله پراود ریاضی‌دان جوان هلندی چاپ شد. در این مقاله مثالهای عجیبی آمده بود که ضمن آن معلوم می‌شد یکی از نتیجه‌گیریهای شن‌فلیس کاملاً نادرست است و بقیه، اگر چه درست‌اند، به دقت اثبات نشده‌اند. به راستی که جمله «از لحاظ هندسی روشن است» شوخی بدی با شن‌فلیس کرده بود.

برای اینکه نشان دهیم، چگونه ممکن است يك حکم «روشن» نادرست باشد، بعضی از مثالهای پراود را می‌آوریم (برای این منظور از ساده شده مطلب که بعداً انجام گرفته است، استفاده می‌کنیم).

پراود میدان محدودی می‌سازد که مرز آن به مفهوم عادی خود، متصله نیست. برای این منظور يك «بطری» انتخاب می‌کند، گلوی آنرا می‌کشد و دور يك دایره می‌پیچاند (شکل ۶۴). در نتیجه میدانی بدست می‌آورد که به وسیله دو مارپیچ و «بطری» محدود شده است. ولی این مرز متصله نیست، برای اینکه این اشکال برطرف شود، باید

به مارپیچ ، محیط دایره‌ای را که دور آن پیچیده شده است ، اضافه کرد .

ولی اگر محیط دایره را به مارپیچ اضافه کنیم ، مشکل تازه‌ای پیدا می‌شود : نقطه‌های مرز را نمی‌توان به نقطه‌های میدان ، با خط‌های به طول محدود وصل کرد .

میدانها و مرزها

بارها از میدان و مرز صحبت کرده‌ایم و حالا موقع آن است که این مفهومیها را دقیقتر بیان کنیم . معلوم شد که تعریف $\mathcal{D}$ از خط کاملاً دقیق نیست ، به همین مناسبت تعریف میدان را هم باید بازسازی کنیم . مجموعه‌ای باز به هر مجموعه‌ای گوییم که از اجتماع دایره‌ها با حذف مرزها (محیطها) بدست آمده باشد . بخصوص متمم هر متصله مسطحه‌ای ، يك مجموعه مسطحه باز است . همه میدانهای مسطحه معمولی (داخل دایره ، مربع ، مثلث و غیره) ، نمونه‌های مجموعه‌های باز (مسطحه) هستند . علاوه بر آن ، اینها مجموعه‌های مرتبط‌اند : هر دو نقطه از مجموعه را می‌توان با خط شکسته‌ای به هم وصل کرد ، بدون اینکه این خط از میدان خارج شود . همین خاصیتها ، میدان مسطحه را تعریف می‌کند .

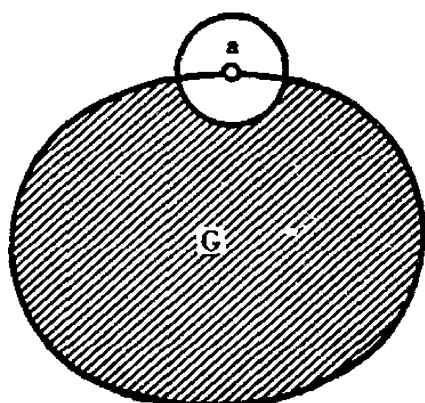
میدان مسطحه ، به مجموعه مرتبطی از نقطه‌های صفحه گفته می‌شود که از اجتماع دایره‌ها با حذف مرزهای آنها ، به وجود آمده است .

تعداد این دایره‌ها می‌تواند دلخواه باشد . با وجود این می‌توان ثابت کرد که هر میدان را می‌توان با مجموعه شمارایی از دایره‌ها تشکیل داد .

دایره‌ای که محیط آنرا کنار گذاشته باشیم ، حومه a ، مرکز آن ، نامیده می‌شود . روشن است که هر نقطه دارای بی‌نهایت حومه است .

a را نقطه مرزی میدان G گویند وقتی که در هر حومه نقطه a هم از نقطه های میدان G وجود داشته باشد و هم نقطه هایی که به G تعلق ندارند (شکل ۶۵).

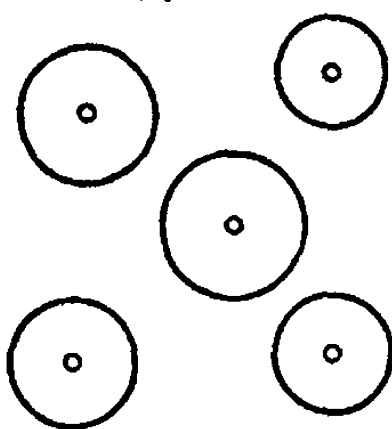
به همین ترتیب می توان مجموعه های باز، میدانها و نقطه های مرزی میدانها را در فضا تعریف کرد. تنها اختلافی که وجود دارد، در اینجا



شکل ۶۵

باید به جای دایره هایی که مرزهای آنها را جدا کرده ایم، کره هایی با مرزهای جدا شده انتخاب کنیم (مرز کره، همان سطح آن است). همراه با مفهوم حومه نقطه (در صفحه و فضا)، باید با مفهوم حومه نسبی نقطه که متعلق به مجموعه ای مثل A است، آشنا شویم. روشن است

شکل ۶۶



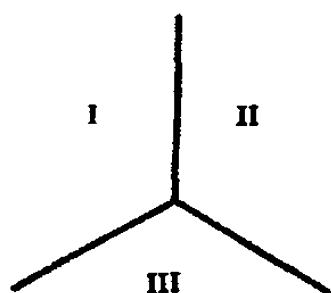
شکل ۶۷

که مجموعه نقطه هایی از حومه که متعلق به مجموعه A باشد، عبارت است از اشتراك حومه معمولی این نقطه با خود مجموعه A . مثلاً اگر A خطی که در شکل ۶۶ نشان داده شده است، و G حومه نقطه a باشد، حومه نسبی این نقطه عبارت است از قطعه ای از خط که بین b و c واقع

است . اگر مجموعه A از چند نقطه تشکیل شده باشد ، در هریک از نقطه‌های آن حومه نسبی وجود دارد که منحصرأ از آن نقطه تشکیل شده است . برای بدست آوردن این حومه نسبی باید حومه معمولی نقطه را طوری انتخاب کرد که شامل نقطه‌های دیگر مجموعه نباشد (شکل ۶۷).

عملیات بزرگ آبیاری

حالا درباره نمونه دیگری از مثالهای عجیب برآود گفتگومی کنیم . نقشه يك کشور را با کشورهای همسایه آن رسم می کنیم . تقریباً هر نقطه



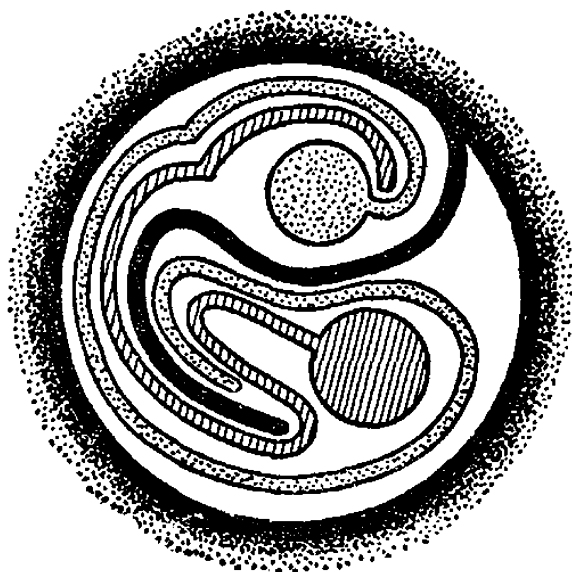
شکل ۶۸

مرزی این کشور متعلق به دو و تنها دو کشور است : کشور مفروض و یکی از همسایه‌های آن . بنابراین در هر نقطه مرزی دو مرزدار ایستاده است : یکی از خود این کشور و دیگری از کشور همسایه . چند نقطه ای

هم در نقشه وجود دارد که در آنجا سه کشور به هم رسیده اند (شکل ۶۸). در این نقطه ها هم، سه مرزدار ایستاده است . ولی تعداد اینگونه نقطه ها در مرز، محدود است . و روشن به نظر می رسد که اینگونه نقطه ها نمی تواند تمام مرز را پر کنند، یعنی نمی شود سه میدان (سه کشور) وجود داشته باشد که يك مرز مشترك داشته باشند . به عبارت دیگر کاملاً روشن به نظر می رسد که سه مرزدار از سه کشور مختلف، نمی تواند در هر نقطه مرز ایستاده باشد . ولی برآود توانست سه میدان با این خاصیت بسازد . برای اینکه از این مثال سر در آوریم ، فرض کنید که جزیره ای در اقیانوسی واقع باشد و در این جزیره دو دریاچه آب شیرین وجود داشته باشد . فقط دریکی از دریاچه ها آب خنك است و دیگری آب گرم دارد . حالا عملیات آبیاری را به این ترتیب طرح می کنیم . در طول شبانه روز اول، آبروهایی از

اقیانوس و از دو دریاچه به نحوی تعبیه می کنیم که هریک از آبروها « کور » باشد (یعنی هر کدام به صورت خلیجی با آب مربوطه) و با یکدیگر تماسی نداشته باشند و ضمناً فاصله هر نقطه از خشکی تا آب اقیانوس و تا آب هریک از دریاچه ها کمتر از یک کیلومتر باشد (شکل ۶۹) .

در نیمی از شبانه روز بعد ، آبروها را طوری ادامه می دهیم که مثل قبل « کور » باشند و با هم تماسی نداشته باشند، ولی فاصله هر نقطه خشکی تا هریک از سه آبرو کمتر از $\frac{1}{4}$ کیلومتر باشد . البته در این مرحله ، باید آبروها را باریکتر از مرحله قبل ساخت . در یک چهارم شبانه روز بعدی ، آبروها را طوری ادامه می دهیم که فاصله هر نقطه خشکی تا هریک از آنها کمتر از $\frac{1}{4}$ کیلومتر باشد و غیره . در هر مرحله ، آبروها نسبت به مرحله قبل پریپیچ و خم تر و باریکتر می شود . بعد از دوشبانه روز ، تمام جزیره از این سه آبرو پوشیده و تبدیل به خطهایی از آبروها می شود . می توان در هر نقطه دلخواه جزیره ایستاد و در



شکل ۶۹

همانجا آب شور اقیانوس یا آب شیرین گرم و یا آب شیرین سرد یکی از دریاچه‌ها را برداشت. ضمناً آنها به هیچ‌وجه به هم مخلوط نشده‌اند. اگر به جای اقیانوس و دریاچه‌ها، سه کشور در نظر بگیریم، نقشه عجیبی را که قبلاً از آن صحبت کرده‌ایم، بدست می‌آوریم: در هر نقطه مرزی باید سه مرزدار، هر یک متعلق به یکی از کشورها، وجود داشته باشد.

تکلیف بعد چه می‌شود؟

گفتیم که در تعریف کانتوری يك نارسایی وجود دارد: این تعریف برای منحنیهای فضایی اصلاً به درد نمی‌خورد، و اینکه سطح در فضا چگونه است، کسی چیزی نمی‌داند.

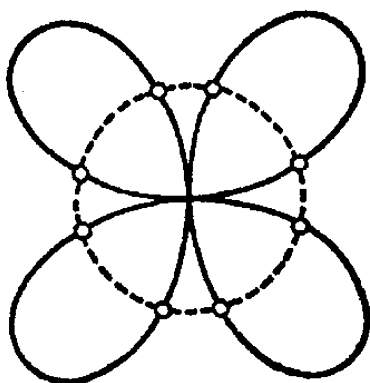
در تابستان سال ۱۹۲۱، دیمیتری فِدوویچ یگودوف، استاد ممتاز دانشگاه مسکو، این مسأله را (که منحنی فضایی و سطح در فضا، چیست) در مقابل شاگرد بیست و سه ساله خود پاول ساموئیلویچ اودیسون قرار داد.

اودیسون به زودی متوجه شد که مسأله یگودوف حالت خاصی از يك مسأله کاملاً کلی‌تر است: «بعد در شکل هندسی چیست، یعنی شکل هندسی چند بعد دارد، چرا باید گفت که پاره خط یا محیط دایره يك بعد، مربع دو بعد و مکعب یا کره سه بعد دارد؟ پاول مرگه‌یویچ الکساندروف عضو فرهنگستان و رئیس جامعه ریاضی مسکو، که در آن زمان دوست اودیسون و آسپیران جوانی بود، درباره این سالهای زندگی دوست خود اینطور به خاطر می‌آورد:

«... تمام تابستان سال ۱۹۲۱ با تلاش شدیدی به خاطر یافتن تعریف «واقعی» بعد گذشت؛ پاول ساموئیلویچ از يك نوع به سراغ نوع دیگری می‌رفت، پیوسته نمونه‌هایی می‌ساخت که معلوم کند، چرا باید این و یا آن نوع را کنار گذاشت. و این کار دو ماه تفکر واقعی و

همه جانبه بود . بالاخره در یکی از روزهای آخر اوگوست، پاول ساموئیلویچ با آمادگی کامل از خواب برخاست . او به تعریف نهایی ^۱ بعد رسیده بود ... در همان روز پاول ساموئیلویچ اودیسون ضمن آب تنی در رودخانه کلیازها ، درباره تعریفی که برای ^۲ بعد پیدا کرده بود، برای من شرح داد و همانجا ضمن این گفتگو، طرح ساختمانی نظریه بعد را ریخت که همراه با يك رشته قضیه بود که بعدها و در جریان چند ماه یکی پس از دیگری ثابت شدند . بعدها ، من دیگر هرگز مانند آن صبح روز اوگوست، در بحثی چنین پربار از مفهومیهای جدید ریاضی ، نه شرکت داشته‌ام و نه شاهد بوده‌ام . تمام برنامه‌ای که در آن روز طرح شده بود ، در طول زمستان سالهای ۱۹۲۱ - ۱۹۲۲ و بهار سال ۱۹۲۲ بطور کامل انجام و نظریه ^۳ بعد کاملاً آماده شد ...»

اساس فکر اودیسون برای تعریف بعد چنین است : برای اینکه قسمتی از خط را از تمام بقیه خط جدا کنیم ، معمولاً دو یا چند نقطه کافی است (در شکل ۷۰ ، برای اینکه قسمتی از گل چهاربرگی را که شامل مرکز آن است ، از بقیه گل جدا کنیم ، به هشت نقطه نیاز داریم). ولی قسمتی از سطح را نمی‌توان از بقیه آن به کمک نقطه‌ها جدا کرد ، برای این منظور حتماً يك خط کامل لازم است. درست به همین ترتیب،



شکل ۷۰

برای جدا کردن قسمتی از فضای سه بعدی از بقیه فضا، باید از سطح استفاده کرد . همه اینها را باید دقیقتر کرد : در بعضی از خطها ، برای جدا کردن قسمتی از آن، بی‌نهایت نقطه لازم است ، ولی این نقطه‌ها در مجموعه خود ، يك خط را تشکیل نمی‌دهند . اودیسون موفق شد همه تعریفهای لازم را منظم کند . از

جهتی، تعریف اودیسون، تعریف اقلیدس را به خاطر می آورد (نقطه، حد خط است؛ خط، حد سطح است). ولی این شباهت مثل شباهتی است که بین کشتیهای یونانی با کشتیهای اقیانوس پیمای امروزی وجود دارد.

تعریف استقرایی بُعد *

حالا دقیقتر درباره تعریف اودیسون از بُعد شکل هندسی صحبت می کنیم. ابتدا روشن می کنیم که مجموعه با بُعد صفر چیست. مجموعه با اندازه صفر نمونه ای، عبارت است از مجموعه ای که از يك نقطه، و یا لااقل از تعداد محدودی نقطه، تشکیل شده باشد. ولی در هر نقطه این مجموعه، حومه نسبی با مرز تهی وجود دارد (شکل ۶۷ را ببینید). اودیسون هم همین خاصیت را برای تعریف مجموعه با بُعد صفر انتخاب کرد. این تعریف به این ترتیب بیان می شود:

مجموعه F به شرطی بُعد صفر دارد که هر نقطه آن دارای حومه نسبی به حد لازم کوچک و با مرز تهی باشد.

در بیشتر موارد، برای اینکه ثابت کنیم مجموعه ای با بُعد صفر است، برای هر نقطه آن حومه معمولی به حد لازم کوچک می سازیم که مرز آن شامل حتی يك نقطه مجموعه F هم نباشد (در این حالت مرز حومه نسبی بدون شك تهی خواهد بود). ولی مجموعه های با اندازه صفر وجود دارد که در فضای سه بعدی قرار گرفته اند و برای نقطه های آن نمی توان حومه های معمولی را ساخت.

جمله «به حد لازم کوچک» را به مناسبت زیر، به تعریف اضافه کرده ایم. اگر این جمله نباشد، مثلاً برای هر مربعی می توان دایره ای با چنان بزرگی انتخاب کرد که تمام مربع در داخل آن بیفتد و حتی يك نقطه مربع در مرز دایره واقع نشود. و اگر این جمله در تعریف نباشد، نتیجه می شود که بُعد مربع، که در واقع مساوی ۲ است، برابر صفر است.

نه تنها مجموعه‌های متناهی، بلکه بسیاری از مجموعه‌های نامتناهی هم دارای بعد صفر هستند. مثلاً مجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم که از نقطه‌هایی واقع بر محور به طولهای $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ تشکیل شده باشد. روشن است که در هر نقطه این مجموعه، حومه‌ای به حد لازم کوچک وجود دارد، به نحوی که مرز آن شامل نقطه‌های این مجموعه نباشد. تنها تردید ممکن است برای نقطه 0 به وجود آید. ولی اگر حومه آنرا به شعاع α بگیریم، به نحوی که α عددی گنگ باشد، حتی یکی از نقطه‌های مجموعه هم در مرز این حومه قرار نمی‌گیرد.

مجموعه Q نقطه‌های به مختص گویا واقع بر خط راست هم بعد صفر دارد. برای اینکه در این مورد قانع شویم، کافی است به عنوان حومه نقطه a در Q ، فاصله‌ای به مرکز این نقطه انتخاب کنیم که طولش عددی گنگ باشد. با این تعریف، مجموعه کانتوری (صفحه ۱۵۷ را ببینید) و مجموعه‌ای که از مربع با حذف صلیبها بدست می‌آید (صفحه ۱۸۵ را ببینید) و بسیاری مجموعه‌های دیگر، به بعد صفر خواهد بود.

به همین ترتیب می‌توان مجموعه‌های با بعد صفر را نه تنها روی صفحه، بلکه در فضا هم ساخت (البته، در این حالت حومه نقطه‌ها را مثل حومه فضایی در نظر می‌گیریم).

بعد از آنکه اودیسون مجموعه با بعد صفر را تعریف کرد، به مجموعه يك بعدی، یعنی خط پرداخت. اینجا دیگر حومه‌های کوچک با مرز تهی وجود ندارد (شکل ۷۰ را ببینید). با وجود این، برای خط‌های معمولی، مرز حومه با خود خط تنها در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. ولی مجموعه‌ای که از تعداد محدودی نقطه تشکیل شده باشد، بعد صفر دارد. اودیسون، با تعمیم این مطلب، به ترتیب زیر مجموعه‌های با بعد واحد را تعریف کرد:

مجموعه F با بعد واحد است وقتی که با بعد صفر نباشد و در هر نقطه آن حومه نسبی به حد لازم کوچک وجود داشته باشد که مرز آن با بعد صفر باشد .

معلوم شد که نه تنها خطهای معمولی (دایره ، پاره خط راست ، بیضی و غیره) طبق تعریف اودیسون بعد واحد دارند ، بلکه تمام خطهای کانتوری هم دارای همین بعد واحد هستند . بنابراین نه تنها مفهوم مسطحه، بلکه مفهوم فضایی خط را هم می توان تعریف کرد :

خط عبارت است از متصله^۱ بعد واحد .

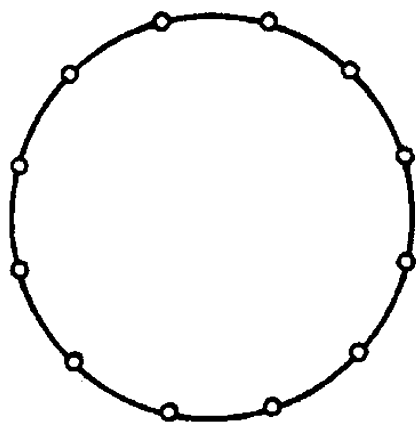
حالا دیگر روشن است که سطح ، جسمهای سه بعدی و بطور کلی مجموعه های با هر تعداد بعد را چگونه باید تعریف کرد ؟ از آنجا که اودیسون ابتدا تعریف بعد ۰ ، سپس به کمک این تعریف ، تعریف بعد ۱ ، سپس به همین ترتیب، تعریف بعد ۲ و غیره را می دهد ، تعریف کلی اودیسون را از بعد ، تعریف استقرایی گویند .

نیازی به تقریظ نیست ، آنرا چاپ کنید !

اودیسون قضیه های جالب بسیاری مربوط به مفهوم بعد ، ثابت کرد . ولی یکی از اساسی ترین قضیه های مربوط به این زمینه را نتوانست ثابت کند : اثبات این حکم بدست نیامد که مکعب معمولی دارای سه بعد است . بعد از تلاش بسیار و طولانی راه خروج از بن بست را پیدا کرد ، تصمیم گرفت که تعریف تازه ای از بعد بدهد . ما به تفصیل درباره این تعریف صحبت نمی کنیم و تنها روی شکل های ساده ای آنرا شرح می دهیم :

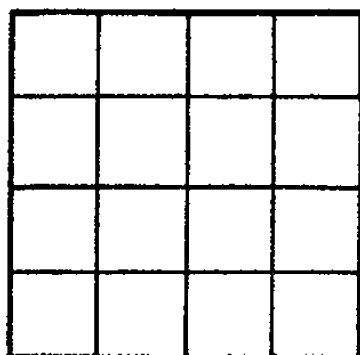
اگر پاره خط یا محیط دایره را در نظر بگیریم ، می توان آنرا به قطعه های به حد لازم کوچک ، طوری تقسیم کرد که هر نقطه آن متعلق به

بیش از دو قطعه نباشد (شکل ۷۱).
 برای این منظور باید هر قطعه را
 همراه با مرزهای آن (یعنی نقطه-
 های انتهایی) در نظر گرفت. سطح
 مربع را به این ترتیب، نمی‌توان
 تقسیم کرد. در نظر اول به نظر
 می‌رسد که برای تقسیم مربع به
 قطعه‌ها، همیشه نقطه‌هایی وجود

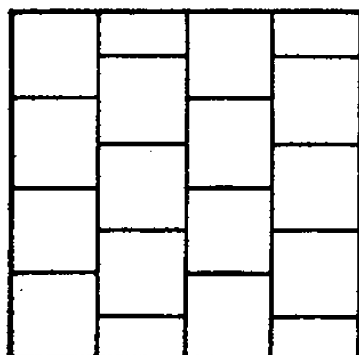


شکل ۷۱

دارد که متعلق به چهار قطعه هستند (شکل ۷۲ - a). ولی اگر
 تقسیمها را مثل آجرهایی که پهلوی هم می‌چینند، انجام دهیم،



a)



b)

شکل ۷۲

می‌توان گفت که هر نقطه نمی‌تواند به بیش از سه قطعه تعلق داشته باشد
 (شکل ۷۲ - b). به همین ترتیب برای مکعب هم تقسیمهایی وجود دارد
 که آنرا به مکعب مستطیل‌های کوچک تقسیم می‌کند و ضمناً هر نقطه آن
 به بیش از چهار مکعب مستطیل تعلق ندارد.

اوریسون هم همین خاصیت را برای تعریف تازه خود از بُعد،
 انتخاب کرد. شکلی را «بعدی گوئیم، وقتی که بتوان آنرا به قسمتهای
 بسته به حد لازم کوچک تقسیم کرد، به نحوی که حتی يك نقطه آن متعلق

به $n + 2$ قسمت مختلف نباشد ، ولی در هر تقسیم به اندازه کافی کوچک ، نقطه‌هایی پیدا شود که به $n + 1$ قسمت مختلف تعلق داشته باشد .

اودیسون به کمک این تعریف برای بعد ، ثابت کرد که مربع ۲ بعد دارد و غیره . و سپس او ثابت کرد که این تعریف ، با تعریف اول او از بعد ، هم‌ارز است .

نظریه بعدها ، که به وسیله اودیسون ساخته شد ، اثر فوق‌العاده‌ای در جهان ریاضی کرد . حادثه زیر این مطلب را به‌خوبی روشن می‌کند . اودیسون در مأموریت خارج از کشوری که داشت ، درباره نتیجه‌گیریهای خودش در گوتینگن سخنرانی کرد . قبل از تسلط نازیها ، گوتینگن یکی از مراکزهای اصلی ریاضیات بود . داوید هیلبرت ، رئیس مکتب ریاضی گوتینگن ، بعد از سخنرانی اودیسون گفت که باید این نتیجه‌گیریها را در مجله «*Mathematische Annalen*» که یکی از مهمترین مجله‌های ریاضی آن زمان بود ، چاپ کرد . بعد از چند ماه ، اودیسون دوباره در گوتینگن سخنرانی کرد ، هیلبرت از مدیر مجله پرسید که آیا اثر اودیسون را چاپ کرده است . به او جواب دادند که باید تقریظی به این اثر نوشته شود . هیلبرت فریاد زد : «ولی من صریحاً گفتم که تقریظی لازم نیست ، باید آنرا چاپ کرد!» و بعد از این بیان صریح ، مقاله را بلافاصله چاپ کردند .

اودیسون در طول سه سال ، فعالیت علمی خود را ادامه داد ، که البته از لحاظ عمق و شدت یکنواخت نبود (او در این مدت چند ده‌تایی از اثرهای خود را چاپ کرد) . در ۱۷ اوگوست سال ۱۹۲۴ ، حادثه غم‌انگیزی زندگی او را درهم نوردید ، او که در شرایط طوفانی آب ، در خلیج گاسکون شنا می‌کرد ، غرق شد .

بعد از مرگ پاول ساموئیلویچ اودیسون ، طرحهای مقدماتی و دستنویسهای زیادی از نتیجه‌گیریهای چاپ نشده ، از او باقی ماند .

دوست نزدیك او (و ضمناً همكار او در بسیاری از كارها)، پاول سرگه یوویچ
آلكساندروف ، با بررسی نوشته‌های او ، آنها را برای چاپ آماده کرد و
در دسترس ریاضی‌دانها قرار داد . در زمان ما نظریه بعدها ، اساسی‌ترین
فصل ریاضیات را تشکیل می‌دهد .

مجموعه‌های نامتناهی خاصیت‌های غیرعادی دارند. به مناسبت بررسی این خاصیت‌ها، ریاضی‌دانها قضاوت‌های خود را بیشتر و بیشتر محکم کردند و اثبات‌های خود را با تفصیل بیشتری تحلیل کردند و در این راه رشته بسیار مهمی از ریاضیات، یعنی منطق ریاضی را به وجود آوردند. تا مدت‌ها گمان می‌کردند که نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی، دانش‌های مجردی هستند که هیچ‌گونه کاربرد عملی ندارند. ولی وقتی که ماشین‌های محاسبه الکترونی پیدا شد، معلوم شد که مسئله برنامه‌ریزی برای این ماشین‌ها دقیقاً به روش‌های منطق ریاضی مربوط است، و بسیاری از بررسی‌هایی که جدا از زندگی به نظر می‌رسید، اهمیت عملی به‌سزایی کسب کرد (از اینگونه در تاریخ دانش بسیار است؛ در همین ابتدای سال‌های سی سده حاضر در بسیاری از کتاب‌ها نوشته شده بود: «اورانیوم اهمیت عملی ندارد»).

در زمان ما، نظریه مجموعه‌ها یکی از اساسی‌ترین رشته‌های ریاضی و در ردیف آنالیز فونکسیونل، توپولوژی، جبر عمومی و غیره به‌شمار می‌رود. در خود نظریه مجموعه‌ها هم، بررسی‌های عمیقی انجام گرفته است. این بررسی‌ها به خود بنیان‌های ریاضی مربوط می‌شود. در این راه روشن شد که نظر «ساده لوحانه» به مفهوم مجموعه‌ها (آنطور که در این کتاب به آن پرداختیم) به‌هیچ‌وجه کافی نیست و روش درست، همان روش اصل موضوعی در نظریه مجموعه‌ها است، ولی پرداختن به این بررسی‌ها از چارچوبی که برای این کتاب در نظر گرفتیم، خارج می‌شود.

مثالها و تمرینها

۱. مجموعه A از عددهای صحیحی تشکیل شده است که بر ۴ قابل قسمت اند ، مجموعه B از عددهای صحیحی که بر ۱۰ قابل قسمت اند و مجموعه C از عددهای صحیحی که بر ۷۵ قابل قسمت اند . مجموعه ABC از چه عددهایی تشکیل شده است ؟

۲. در کتابخانه ، کتابهایی در رشته‌های مختلف دانش و هنر وجود دارد . مجموعه همه کتابهای کتابخانه را A و مجموعه همه کتابهای ریاضی را $(نه تنها در کتابخانه مفروض) B$ می‌نامیم . مجموعه $A - B$ را مشخص کنید .

۳. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ، این عبارت را ساده کنید :

$$(A + B + C)(A + B) - [A + (B - C)]A$$

۴. مجموعه A از نقطه‌های $M(x, y)$ صفحه تشکیل شده است که در مورد آنها $|x| \leq 4$ و $|y| \leq 4$ ، مجموعه B از نقطه‌هایی از صفحه که برای آنها $x^2 + y^2 \leq 25$ و مجموعه C از نقطه‌هایی از صفحه که برای آنها $x > 0$. مجموعه $AB - C$ را نشان دهید .

۵. این تساویها را ثابت کنید :

a) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C),$

b) $(A - B) + (B - C) + (C - A) + ABC = A + B + C$

۶. ثابت کنید :

a) $AC + BD \subset (A + B)(C + D),$

$$b) \quad (B - C) - (B - A) \subset A - C,$$

$$c) \quad A - C \subset (A - B) + (B - C)$$

۷. آیا از $A - B = C$ نتیجه می‌شود $A = B + C$ ؟

۸. آیا از $A = B + C$ نتیجه می‌شود $A - B = C$ ؟

۹. چه رابطهای بین این مجموعه‌ها وجود دارد ؟

$$a) \quad A - (B + C) \quad \text{و} \quad (A - B) - C$$

$$b) \quad A + (B - C) \quad \text{و} \quad (A + B) - C$$

$$c) \quad (A - B) + C \quad \text{و} \quad A + (C - B)$$

۱۰. با استفاده از رابطه‌های ۱ تا ۲۶ در صفحه‌های ۵۹ و ۶۰، این عبارت را ساده کنید :

$$[(X - Y)'(X' + Y')]'$$

۱۱. بین فاصله $0 < x < 1$ و تمام محور عددها، تناظر يك به يك برقرار کنید .

۱۲. بین مجموعه‌های عددی $0 \leq x < 1$ و $0 \leq x < \infty$ تناظر يك به يك برقرار کنید .

* ۱۳. بین پاره خط $0 \leq x \leq 1$ و فاصله باز $0 < x < 1$ تناظر يك به يك برقرار کنید .

۱۴. تناظر يك به يك را در نگاشت پاره خط $0 \leq x \leq 1$ بر تمام محور عددها برقرار کنید .

* ۱۵. بین مجموعه همه عددهای پاره خط $0 \leq x \leq 1$ و مجموعه عددهای گنگ همین فاصله، تناظر يك به يك برقرار کنید .

* ۱۶. تناظر يك به يك را در نگاشت نیم خط $0 \leq x < \infty$ بر تمام محور عددها پیدا کنید .

۱۷. بین نقطه‌های صفحه و نقطه‌های کره، با حذف يك نقطه آن، تناظر يك به يك برقرار کنید .

- * ۱۸. بین نقطه‌های صفحه و نقطه‌های کره ، تناظر يك به يك برقرار كنيد .
۱۹. بین نقطه‌های مربع باز $0 < x < 1$ ، $0 < y < 1$ و نقطه‌های صفحه ، تناظر يك به يك برقرار كنيد .
۲۰. بین مجموعه عددهای گویای پاره خط $0 \leq x \leq 1$ و مجموعه همه نقطه‌های صفحه ، که هر دو مختص آنها عددی گویا است ، تناظر يك به يك برقرار كنيد .
۲۱. بین مجموعه همه عددهای صحیح و مجموعه همه سه جمله‌ایهای درجه دوم با ضریبهای صحیح ، تناظر يك به يك برقرار كنيد .
- * ۲۲. بین مجموعه همه عددهای حقیقی و مجموعه همه نقطه‌های صفحه ، تناظر يك به يك برقرار كنيد .
۲۳. بین مجموعه همه عددهای حقیقی و مجموعه همه سه جمله‌ایهای درجه دوم با ضریبهای حقیقی ، تناظر يك به يك برقرار كنيد .
۲۴. قوت مجموعه همه چهار ضلعیهای مسطحه ، که مختصات رأسهای آنها عددهایی گویا است ، کدام است ؟
۲۵. مطلوب است قوت مجموعه همه چند ضلعیهای مسطحه که مختصات همه رأسهای آنها ، عددهایی گویا باشد .
۲۶. قوت مجموعه همه چند وجهیهای محدب ، که مختصات همه رأسهای آنها گویا است ، کدام است ؟
۲۷. مطلوب است قوت مجموعه همه تابعهای گویا ، با ضریبهای صحیح ، هم در صورت و هم در مخرج .
۲۸. مطلوب است قوت مجموعه همه چند جمله‌ایهایی که ضریبهای آنها ، عددهایی گویا باشد .
۲۹. مطلوب است قوت مجموعه همه دنباله‌های عددهای طبیعی .
۳۰. مطلوب است قوت مجموعه همه دنباله‌های متناهی از عددهای طبیعی .
۳۱. مطلوب است قوت مجموعه همه دنباله‌های صعودی از عددهای طبیعی .

۳۲. قوت مجموعه همه چند جمله‌ایهای درجه سوم با ضربهای حقیقی را پیدا کنید .

۳۳. قوت مجموعه همه چند جمله‌ایهای با ضربهای حقیقی را پیدا کنید .

۳۴. آیا می‌توان روی صفحه ، مجموعه‌ای با قوت متصله از دایره‌های متقاطع ساخت ؟

۳۵. آیا می‌توان روی صفحه ، مجموعه‌ای با قوت متصله از حرفهای دو به دو متقاطع Γ ساخت ؟ از حرفهای N چطور ؟

۳۶. آیا می‌توان روی صفحه ، متصله‌ای از حرفهای دو به دو متقاطع A ساخت ؟ از حرفهای δ چطور ؟

۳۷. قوت مجموعه همه عددهای حقیقی که در نوشتن آنها به صورت دهدهی به رقم ۷ برخورد می‌کنیم ، کدام است ؟

۳۸. قوت مجموعه همه عددهای حقیقی که در نوشتن آنها به صورت دهدهی به رقم ۵ برخورد نمی‌کنیم ، کدام است ؟

۳۹. قوت مجموعه عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ که در نوشتن دهدهی آنها در مرتبه دوم به رقم ۶ برخورد می‌کنیم و در مرتبه‌های دیگر این رقم وجود ندارد ، پیدا کنید .

۴۰. ثابت کنید که اگر داشته باشیم $A \sim B$ و $B \sim A$ ، خواهیم داشت : $A \sim B$ به معنای این است که A و B يك قوت دارند) .

۴۱. ثابت کنید که اگر $A \subset B$ و $A \sim A+C$ ، در این صورت $B \sim B+C$.

۴۲. آیا این حکم درست است : «اگر $A \sim B$ ، $C \supset A$ ، $C \supset B$ ، در این صورت $C - A \sim C - B$ ؟

۴۳. آیا این حکم درست است : «اگر $A \sim C$ ، $B \sim D$ و ضمناً $A \supset B$ ، آنگاه $C - A \sim C - D$ ؟

۴۴. همه نقطه‌های گویای پاره خط $[0, 1]$ را شماره‌گذاری می‌کنیم. دنباله نقطه‌های $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ بدست می‌آید. حومه نقطه r_1 را به شعاع $\frac{1}{10}$ ، حومه نقطه r_2 را به شعاع $\frac{1}{40}$ ، حومه نقطه r_3 را به شعاع $\frac{1}{40}$ و غیره می‌سازیم. همه حومه‌هایی را که بدست می‌آید، جمع می‌کنیم. آیا مجموعه M که به این ترتیب بدست می‌آید، شامل تمام پاره خط است؟

۴۵. طول مجموعه M از مسأله ۴۴ را تخمین بزنید.

* ۴۶. مجموعه همه دنباله‌های عددهای حقیقی $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $0 \leq x_n \leq 1$. ثابت کنید این مجموعه قوت متصله دارد.

* ۴۷. تابع پیوسته‌ای بسازید که روی هر پاره خط، بی‌نهایت ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد.

* ۴۸. M را مجموعه‌ای از نقطه‌های پاره خط $[0, 1]$ می‌گیریم که بتوان آنها را به صورت کسرهای دهدهی نوشت و هیچکدام از رقمهای دهدهی آن مساوی ۳ و ۸ نباشد. ثابت کنید برای نوشتن این مجموعه، متناوباً از پاره خط، فاصله‌هایی حذف می‌شود.

* ۴۹. همین مسأله را برای موردی حل کنید که در نوشتن دهدهی به ترکیب ۳۸ (با همین ردیف) برخورد نکنیم.

* ۵۰. a را نقطه حدی برای مجموعه M گویند، وقتی که در هر حومه آن، بی‌نهایت نقطه این مجموعه وجود داشته باشد. ثابت کنید که هر نقطه حدی مجموعه کانتوری (صفحه ۱۵۷ را ببینید)، به این مجموعه تعلق دارد. برعکس ثابت کنید که هر نقطه از مجموعه کانتوری، يك نقطه حدی برای آن است. همین حکم را برای مسأله‌های ۴۸ و

۴۹ هم ثابت کنید .

۵۱. ثابت کنید که هر نقطه از پاره خط $[۱, ۰]$ ، برای مجموعه همه عددهای گویای $۱ \leq r \leq ۰$ ، يك نقطه حدی است .

۵۲. آیا برای مجموعه عددهای صحیح ، نقطه حدی وجود دارد ؟

۵۳. ثابت کنید که متمم هر مجموعه باز در صفحه ، شامل همه نقطه های حدی خود است .

۵۴. ثابت کنید که اگر مجموعه ای شامل همه نقطه های حدی خودش باشد ، متمم آن يك مجموعه باز است .

۵۵. نمونه مجموعه هایی واقع بر صفحه ذکر کنید که :

(الف) نقطه های مرزی نداشته باشند ،

(ب) نقطه های مرزی داشته باشند ، ولی هیچکدام از این نقطه ها به مجموعه تعلق نداشته باشند .

(ج) شامل نقطه های مرزی خود باشند ،

(د) فقط از نقطه های مرزی تشکیل شده باشند ،

(ه) تنها شامل قسمتی از نقطه های مرزی خود باشند .

۵۶. نمونه مجموعه هایی در فضا بسازید که خاصیت های الف تا ه از مسأله ۵۵ را داشته باشند .

امروز دیگر می‌دانیم که از لحاظ منطقی می‌توان تقریباً همه ریاضیات ماضی را از يك سرچشمه، یعنی نظریه مجموعه‌ها نتیجه گرفت.
ن. بوریانکی

تأثیر بی‌اندازه نظریه مجموعه‌ها در پیشرفت ریاضیات نیم‌قرن اخیر، چیزی است که امروز همه به آن اعتقاد دارند.

پ. سن. اگسائندروف
آ. ن. کولومگوروف

نظریه مجموعه‌ها به‌طور جدی در بسیاری از رشته‌های ریاضیات نفوذ کرده و بر آنها اثر گذاشته است؛ و به‌خصوص نقش اصلی در بررسی‌های مربوط به پدیده‌های منطقی و فلسفی ریاضیات داشته است

ر. کوران

عصوه‌های مجموعه‌ها را می‌توان از متنوع‌ترین چیزها انتخاب کرد: کتابها، انبها، عددها، تابه‌ها، نقطه‌ها، زاویه‌ها و غیره. به‌همین مناسبت، از همان شروع کار روشن است که نظریه مجموعه‌ها، چه وسعت فوق‌العاده‌ای دارد و چگونه در رشته‌های گوناگون دانش بشری (ریاضیات، مکانیک، فیزیک) به‌کار می‌رود.
ن. ن. لوزین

قانونهایی که بر عددهای نامتناهی ترانزیتی حکومت می‌کند، از بیخ و بن با قانونهای حوزه عددهای متناهی، فرق دارد.
ژ. کانتور